

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı



# KESİKLİ TERCİH MODELLERİ

## Discrete Choice Models

---

*Dr. Kadir Berkhan AKALIN*

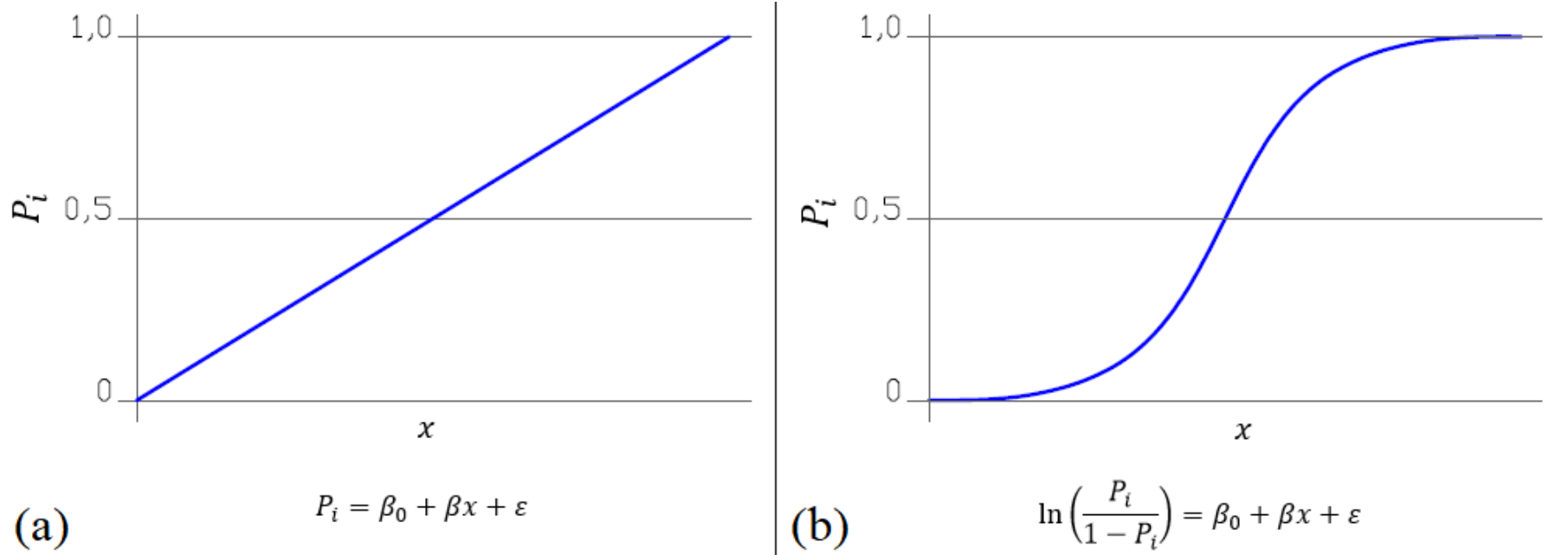
5

## FAYDA TABANLI TERCİH TEORİSİ

Bağımlı değişkeninin sürekli sayısal değerler yerine iki veya daha fazla ayrık seçeneklerden oluştuğu problemler için Kesikli Tercih Modelleri (KTM) yöntemleri kullanılmaktadır. Bu modellerde amaç seçimin olasılığının hesaplanmasıdır.

# FAYDA TABANLI TERCİH TEORİSİ

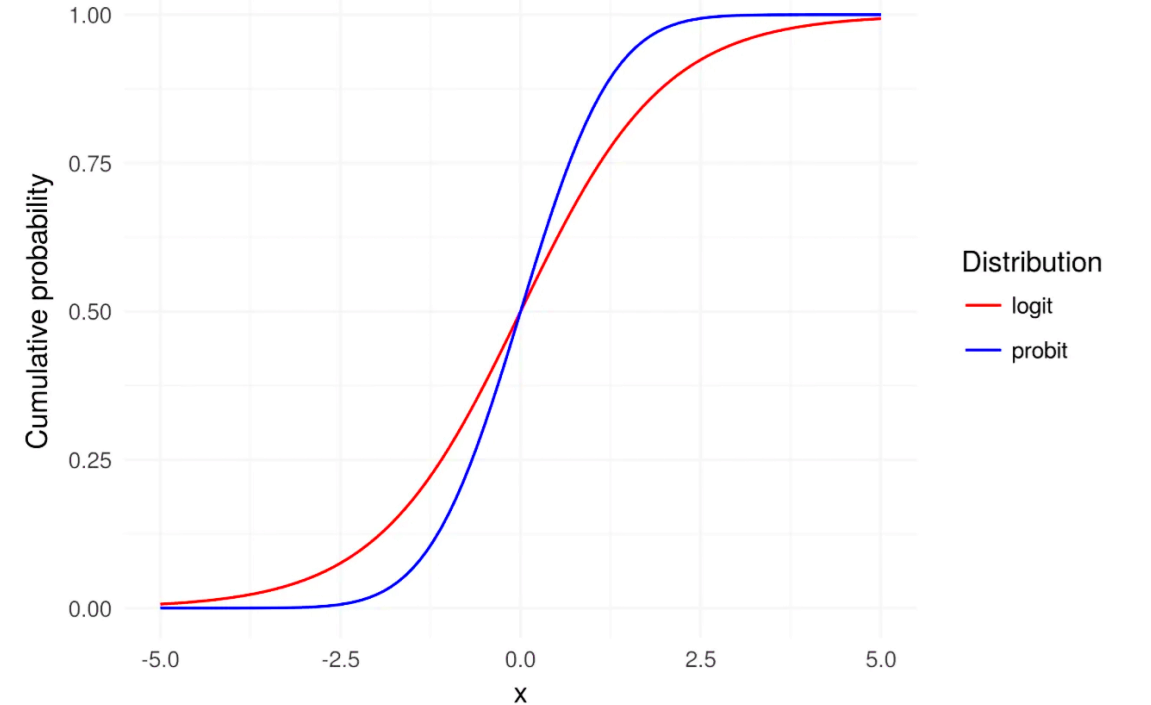
KTM'lerin en temeli Doğrusal Olasılık Modeli'dir (a). Ancak bu modelde karşılaşılan hata terimlerinin normal dağılıma uymaması ve hata terimlerinin varyanslarının değişken olması gibi problemler Lojit (b) ve Probit Model gibi farklı tekniklerin geliştirilmesine olan ihtiyacı doğurmuştur.



# LOJİT / PROBİT

Modelde hesaplamalar, hata terimlerinin varyanslarının normal dağılıma uyması durumunda Probit, Gumbel dağılımı gibi Tip-1 uç değer dağılıma uyması durumunda Lojit Model yaklaşımıyla ele alınır. Hata terimlerinin farkı iki sabit değer arasında tekdüze dağılıyorsa Doğrusal Olasılık Modeli ile hesap yapılır.

İki rastgele değişken normal dağılıma uyuyorsa farkları da normal dağılıma uyum göstermektedir. İki rastgele değişken Tip-1 uç değer dağılımına uyuyorsa farkları lojistik dağılıma uymaktadır.



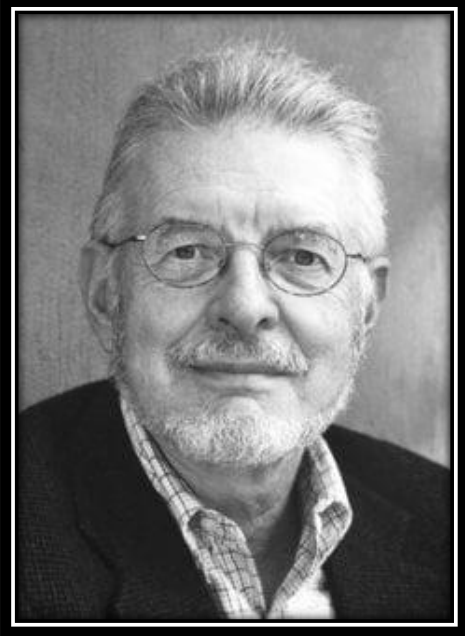
# LOJİT / PROBİT

- Lojit modeli, bir olayın başarı olasılığını bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olarak modellemek için kullanılırken, Probit modeli, bir olayın bir kategori aralığından birine girme olasılığını tahmin etmek için kullanılır.
- Lojit modeli, Probit modelinden daha yaygın olarak kullanılmaktadır ve daha geniş bir literatüre sahiptir.
- Lojit modeli ayrıca lojistik bir işlev kullandığı için aykırı değerlere karşı daha sağlamdır, ancak Probit modeli aykırı değerlere karşı daha hassastır.
- Lojit modeli, bağımsız değişkenler ve ikili sonuç arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri işleyebildiği için daha esnektir.

$$\text{Lojit: } \log\left(\frac{P}{1-P}\right) = Z = \beta_0 + \sum \beta_j X_j$$

$$\text{Probit: } P(Y = 1|X) = \Phi(Z) = \Phi\left(\beta_0 + \sum \beta_j X_j\right)$$

## FAYDA TABANLI TERCİH TEORİSİ



DANIEL L. MCFADDEN

İlgili çalışmalarıyla 2000 yılında ekonomi dalında NOBEL ödülünü kazanan **McFadden** (1974) tarafından **Rastgele Fayda Maksimizasyonu (RFM)** teorisi üzerine geliştirilen fayda tabanlı Kesikli Tercih Modelleri (KTM), bireylerin seçim davranışlarını açıklamak ve birçok farklı alanda çeşitli ürün ve hizmetlerin pazar paylarını tahmin etmek için kullanılmıştır.

RFM'deki "**rastgele**" terimi modele eklenen hata terimini temsil etmektedir.

# FAYDA TABANLI TERCİH TEORİSİ

Genel olarak, bireylerin seçim davranışlarını tahmin etmeye yönelik modeller fayda maksimizasyonuna dayanmaktadır.

Fayda maksimizasyonu kuralı, bir bireyin mevcut alternatifler kümesinden kendi faydasını maksimize eden alternatifi seçeceğini ifade etmektedir.

## FAYDA TABANLI TERCİH TEORİSİ

RFM modellerinde bireylerin faydaları, her alternatif için fayda fonksiyonu adı verilen bir denklemlle tanımlanır:

$$U_i = V_i + \varepsilon_i = \beta_0 + \sum \beta_j X_j$$

$U_i$ : ilgili alternatifin (i seçeneğinin) faydası (veya fayda fonksiyonu)

$V_i$ : ilgili seçeneğin belirleyici (deterministik veya sistematik) bileşeni

$\varepsilon_i$ : ilgili seçeneğin rassal bileşen veya hata terimi

$\beta_0, \beta_j$ : ilgili seçeneğin tahmin parametreleri veya ağırlık faktörleri



## TAHMİN PARAMETRELERİ

- Ağırlık faktörleri ilgili niteliklerin tahmin edilen katsayılarıdır.
- Her bir ağırlık faktörü, ilişkili özelliğin göreceli önemini temsil eder. Bunlara eğilim/uyum/tatmin (taste) faktörleri de denir.
- Öznitelik seviyesindeki bir artış faydayı azaltıyorsa katsayı negatif, faydayı arttırıyorsa pozitifdir.

## FAYDA (UTILITY) VEYA FAYDASIZLIK (DISUTILITY)

- Kavram **fayda maksimizasyonu** olsa bile, ulaştırmada genellikle faydasızlık yaşanır. Bunun gibi durumlar için **faydasızlık minimizasyonu** üzerinde çalışılır.
- Seyahat süresi ve seyahat maliyeti gibi yaygın olarak kullanılan değerlerin artmasıyla faydanın azalması beklenir.
- Konfor gibi diğer niteliklerin artmasıyla, faydanın artması beklenir.
- Model öncesinde herhangi beklenti içermeyen değişkenler (yaş, cinsiyet vb.) de olabilir.

## FAYDA TABANLI TERCİH TEORİSİ

Fayda fonksiyonu ( $U_i$ ), bir dizi alternatif arasından seçilecek alternatifin belirlenmesini sağlayan bir değer üretir ve bu değer sayısal olarak ifadesinin tam bir anlamı yoktur. Yalnızca tercihlerin olasılıklarının hesaplanması amacıyla kullanılır. Fayda fonksiyonları ile elde edilen faydalar birimsizdir. Ancak fayda birimi (util) olarak anılır:

$$U_i = -\beta_1 * Zaman - \beta_2 * Maliyet$$

1 birim

1/dakika

dakika

1/TL

TL

## BİRİM DÖNÜŞTÜRME – GENELLEŞTİRİLMİŞ MALİYET

Eğer tamamı ölçülebilir ve paraya dönüştürülebilir değişkenlerden oluşan bir model tercih edilirse, bu durumda **genelleştirilmiş maliyetlere (GM)** dönüştürülmüş ve anlamlı birimlerle çalışılabilen bir yaklaşım da elde edilebilir.

$U_i = -\beta_1 * Zaman - \beta_2 * Maliyet$  fayda fonksiyonu için;

$\frac{-\beta_1}{-\beta_2} = \frac{-1/dk}{-1/TL} = TL/dk$  olduğuna göre, buna Zaman Değeri (ZD) dersek;

$$\mathbf{GM} = \frac{U_i}{-\beta_2} = \mathbf{ZD * Zaman + Maliyet}$$

$1 \text{ birim}/(1/TL)=TL$

$TL/dk$

$dk$

$TL$

# DETERMINİSTİK / STOKASTİK YAKLAŞIM

RFM modelinde, **deterministik** ve **stokastik** olmak üzere iki yaklaşım mevcuttur.

**Deterministik** (belirlenimsel) yaklaşımda bireylerin kesin olarak faydası en yüksek olan seçeneği tercih ettikleri varsayımı yapılırken

**Stokastik** (olasılıksal) yaklaşımda bireylerin faydası en yüksek olan seçeneği tercih etme olasılığının daha yüksek olduğu varsayılmaktadır

$$U_i > U_j \text{ ise } U_i \text{ seçilir}$$

$$U_i > U_j \text{ ise } P_i > P_j$$

$P_i, P_j$ : ilgili seçeneğin ( $i$  veya  $j$ ) tercih edilme olasılıklarıdır.

## ÖRNEK: DETERMİNİSTİK YAKLAŞIM

10 bireyin iş yolculuğu için tür tercihlerinin özel ulaşım ve toplu taşıma olmak üzere iki alternatiften oluştuğu bir örnek için; türlerin özniteliklerine bağlı olarak yolculuk süresi (dakika) ve yolculuk ücreti (TL), bireylerin özniteliğine bağlı olarak ise günlük gelir (TL) değişkenleri verilmiş olsun. Buna göre genelleştirilmiş maliyetler cinsinden üretilen model aşağıdaki gibi verilsin:

$$U = -0.2 * Süre - 80 * \frac{\text{Ücret}}{\text{Gelir}}$$

## ÖRNEK: DETERMİNİSTİK YAKLAŞIM

$$U = -0.2 * \text{Süre} - 80 * \frac{\text{Ücret}}{\text{Gelir}}$$

Birey	Günlük gelir	Özel ulaşım (öu)		Toplu taşıma (tt)		Gerçek Tercih	
	(TL)	Süre (dk)	Ücret (TL)	Süre (dk)	Ücret (TL)		
1	479	9	11	15	5		tt
2	520	10	15	20	5	öu	
3	692	9	11	16	5	öu	
4	497	9	11	20	5	öu	
5	379	10	15	17	5	öu	
6	349	10	12	15	5		tt
7	621	10	12	20	5	öu	
8	435	9	11	20	5	öu	
9	547	12	15	19	5	öu	
10	346	10	12	15	5		tt

## ÖRNEK: DETERMİNİSTİK YAKLAŞIM

$U_i > U_j$  ise  $U_i$  seçilir

Birey	Günlük gelir	Özel ulaşım (öu)		Toplu taşıma (tt)		Gerçek Tercih		U(öu)	U(tt)
	(TL)	Süre (dk)	Ücret (TL)	Süre (dk)	Ücret (TL)				
1	479	9	11	15	5		tt	-3.64	-3.84
2	520	10	15	20	5	öu		-4.31	-4.77
3	692	9	11	16	5	öu		-3.07	-3.78
4	497	9	11	20	5	öu		-3.57	-4.80
5	379	10	15	17	5	öu		-5.17	-4.46
6	349	10	12	15	5		tt	-4.75	-4.15
7	621	10	12	20	5	öu		-3.55	-4.64
8	435	9	11	20	5	öu		-3.82	-4.92
9	547	12	15	19	5	öu		-4.59	-4.53
10	346	10	12	15	5		tt	-4.77	-4.16



## ÖRNEK: DETERMİNİSTİK YAKLAŞIM

Toplu taşıma sisteminde servis sisteminde yapılacak bir gelişme ve sefer sıklıklarının arttırılmasıyla ortalama sürelerin %20 kısılması sayesinde tercihlerde nasıl bir değişiklik olur?

$$U = -0.2 * Süre - 80 * \frac{Ücret}{Gelir}$$

## ÖRNEK: DETERMİNİSTİK YAKLAŞIM

$U_i > U_j$  ise  $U_i$  seçilir

Birey	Günlük gelir	Özel ulaşım (öu)		Toplu taşıma (tt)		U(öu)	U(tt)	U(öu)	U(tt)
	(TL)	Süre (dk)	Ücret (TL)	Süre (dk)	Ücret (TL)	(model)	(model)	(senaryo)	(senaryo)
1	479	9	11	12	5	-3.64	-3.84	-3.64	-3.24
2	520	10	15	16	5	-4.31	-4.77	-4.31	-3.97
3	692	9	11	13	5	-3.07	-3.78	-3.07	-3.18
4	497	9	11	16	5	-3.57	-4.80	-3.57	-4.00
5	379	10	15	14	5	-5.17	-4.46	-5.17	-3.86
6	349	10	12	12	5	-4.75	-4.15	-4.75	-3.55
7	621	10	12	16	5	-3.55	-4.64	-3.55	-3.84
8	435	9	11	16	5	-3.82	-4.92	-3.82	-4.12
9	547	12	15	16	5	-4.59	-4.53	-4.59	-3.93
10	346	10	12	12	5	-4.77	-4.16	-4.77	-3.56

## ÖRNEK: DETERMİNİSTİK YAKLAŞIM

$U_i > U_j$  ise  $U_i$  seçilir

Birey	Gerçek Tercih		Model				Senaryo			
	P(öu)	P(tt)	U(öu)	U(tt)	P(öu)	P(tt)	U(öu)	U(tt)	P(öu)	P(tt)
1	0	1	-3.64	-3.84	1	0	-3.64	-3.24	0	1
2	1	0	-4.31	-4.77	1	0	-4.31	-3.97	0	1
3	1	0	-3.07	-3.78	1	0	-3.07	-3.18	1	0
4	1	0	-3.57	-4.80	1	0	-3.57	-4.00	1	0
5	1	0	-5.17	-4.46	0	1	-5.17	-3.86	0	1
6	0	1	-4.75	-4.15	0	1	-4.75	-3.55	0	1
7	1	0	-3.55	-4.64	1	0	-3.55	-3.84	1	0
8	1	0	-3.82	-4.92	1	0	-3.82	-4.12	1	0
9	1	0	-4.59	-4.53	0	1	-4.59	-3.93	0	1
10	0	1	-4.77	-4.16	0	1	-4.77	-3.56	0	1
Σ	7	3			6	4			4	6

Gerçek tercih;

$$P_{\text{öu}} = 7/10 = \%70$$

$$P_{\text{tt}} = 3/10 = \%30$$

Model;

$$P_{\text{öu}} = 6/10 = \%60$$

$$P_{\text{tt}} = 4/10 = \%40$$

Senaryo;

$$P_{\text{öu}} = 4/10 = \%40$$

$$P_{\text{tt}} = 6/10 = \%60$$

## **DETERMİNİSTİK YAKLAŞIM İLE NELER YAPABİLİRİZ?**

- Tercihlerin bireylerin ve seçeneklerin niteliklerine bağılı olarak tanımlanabildiğı bir yaklaşıma sahip olmamızı temelde sağlayabilir.
- Bu sayede, seçeneklerin öznitelikleri değıştiğinde tercihlerde meydana gelen değışiklikler tahmin edilebilir.

## **DETERMİNİSTİK YAKLAŞIMDAKİ SORUNLAR NELER?**

- Herhangi bir alternatifteki gelişme, benzer bütün bireyleri mutlaka (%100) ilgili alternatife kaydırır mı?
- Sonsuz gelire sahip zamanla ilgili hiçbir problemi olmayan bir kişi kesinlikle toplu taşıma kullanmaz mı?
- Herkes için zaman değeri aynı mıdır?

# **DETERMINİSTİK YAKLAŞIMDAKİ SORUNLARA ÇÖZÜM ÖNERİLERİ**

- **SABİT FAYDA MODELİ:**

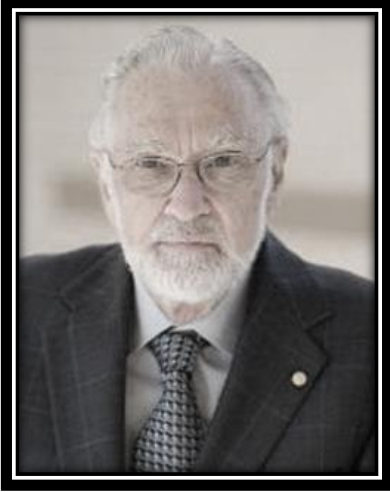
Deterministik (sabit) faydalar ile olasılıksal karar kuralı

- **RASTGELE FAYDA MODELİ:**

Olasılıksal (rastgele) faydalar ile olasılıksal karar kuralı

# KATI FAYDA

## *STRICT UTILITY*



R. DUNCAN LUCE

Luce'nin (1959) seçim aksiyomuna göre seçeneklerden birinin seçilme olasılığı, ilgili seçeneğin faydasının tüm tercihlerin faydalarının toplamına oranı şeklinde hesaplanır. Bu teoremin bir kısıtı olarak (strict utility) faydalar pozitif değer almak zorundadır:

$$p(i|Z) = \frac{v(i)}{\sum_{j \in Z} v(j)} \quad , \quad v > 0$$

# **İLGİSİZ SEÇENEKLERİN BAĞIMSIZLIĞI (İSB)**

*IIA: INDEPENDENCE OF IRRELEVANT ALTERNATIVES*

Luce'ye (1959) göre; iki farklı seçeneğin tercih edilme olasılıklarının oranı, özelliklerin varlığından veya diğer bütün seçeneklerden bağımsızdır. Bu durum ilgisiz seçeneklerin bağımsızlığı (İSB) olarak adlandırılmaktadır.

Diğer bir deyişle, rastgele fayda teoremindeki hata terimleri birbirinden bağımsızdır. Hata terimleri arasında herhangi bir ilişki olması durumunda, kullanılan model tahmin yaparken yanlış olasılıklar çıktısı verecektir. Bu nedenle seçenekler arasında belirgin bir fark olmalıdır. Aksi durumda seçeneklerin birbirinden bağımsız oldukları varsayımıyla modelde yanlış tahminler yapılabilir.



# İSB ÖRNEĞİ: KIRMIZI OTOBÜS – MAVİ OTOBÜS

*IIA EXAMPLE: RED BUS – BLUE BUS*



# İSB ÖRNEĞİ: KIRMIZI OTOBÜS – MAVİ OTOBÜS

## *IIA EXAMPLE: RED BUS – BLUE BUS*

Daniel L. McFadden (1974) kırmızı otobüs – mavi otobüs (red bus – blue bus) örneğiyle şu şekilde açıklamaktadır: İki tercihli bir seçim modelinde seçeneklerden biri özel otomobil diğeri ise otobüstür. İkisinin de seçilme olasılığının birbirine eşit yani 0,5 (%50) olduğu varsayalım. Mevcut otobüsler mavi renktedir. Bu tercih modeline yeni bir tür olarak kırmızı otobüs ilave edilsin. Bu durumda üç elemanı olan bir tercih kümesi olacaktır. Her bir seçeneğin seçilme olasılığı ise 0,33 (%33) olacaktır. Sonuç olarak özel otomobilin seçilme olasılığı %33, mavi otobüsün %33 ve kırmızı otobüsün %33 olacaktır. Bu durumda özel otomobilin tercih edilme olasılığı düşerken, rengine bakılmazsa otobüslerin tercih edilme olasılığı %67'ye yükselecektir. Gerçek hayatta böyle bir durum mümkün değildir. Kimse rengi için bir otobüs yerine diğeri tercih etmeyecektir. Esas olarak sisteme kırmızı otobüsler eklenince, otobüslerin tercih edilme olasılığı %50 olarak kalmalıydı. Bu şekilde ihlaller yapılırsa tahminler yanlış olacaktır.

# BİRBİRİNDEN BAĞIMSIZ VE ÖZDEŞ DAĞILMIŞ RASSAL TERİMLER

*IID: INDEPENDENT AND IDENTICALLY DISTRIBUTED*

Rastgele fayda maksimizasyonu (RFM) modelindeki bir başka varsayımda, rassal terimlerin birbirinden bağımsız ve özdeş dağılımı gösterdikleri (IID: Independent and Identically Distributed) kabul edilmektedir. Bu durumda; bir seçenek kümesi içindeki her bir gözlem, belirli durağan olasılık modelinden bağımsızdır:

$$P(Z_1, Z_2) = P(Z_1) * P(Z_2)$$

# BİRBİRİNDEN BAĞIMSIZ VE ÖZDEŞ DAĞILMIŞ RASSAL TERİMLER

*IID: INDEPENDENT AND IDENTICALLY DISTRIBUTED*



Bunu açıklamak için basit bir zar örneği verilebilir. Örneğin, altı yüze sahip hilesiz iki adet zar olduğu varsayalım. Her bir zar için de 3 gelme olasılığı ( $1/6$ ) aynıdır. İki zarın aynı anda ya da farklı zamanlarda atılmış olması bu olasılığı değiştirmez. Yani, görünen değerler bağımsız ve aynı dağılım gösteren rassal değişkenlerdir.

# BİRBİRİNDEN BAĞIMSIZ VE ÖZDEŞ DAĞILMIŞ RASSAL TERİMLER

*IID: INDEPENDENT AND IDENTICALLY DISTRIBUTED*

RFM modellerindeki Lojit yaklaşımı esasen şans olasılıklarına benzer şekilde bir Olasılık Oranı (Odds) kavramından türetilmiştir:

$$\mathit{Odds} = \frac{P}{1 - P} = \frac{\mathit{Olayın\ olma\ olasılığı}}{\mathit{Olayın\ olmama\ olasılığı}}$$

# İKİLİ LOJİT MODEL

## *BINARY LOGIT MODEL*

Stokastik yaklaşımı göstermek için öncelikle lojitin en temel olan, seçim kümesinin iki seçenek içerdiği özel bir durumla açıklamak faydalı olabilir.

Hatırlanacağı üzere;

***Deterministik* yaklaşımda  $U_i > U_j$  ise kesinlikle  $U_i$  seçilirken,**

**Stokastik yaklaşımda  $U_i > U_j$  ise  $P_i > P_j$  denilmektedir. Yani her alternatif belirli olasılıklarla tercih edilmektedir.**

# İKİLİ LOJİT MODEL

## *BINARY LOGIT MODEL*

Bu amaçla, hata terimlerinin farklarının lojistik dağıtıldığı varsayımı altında, seçenek 1 ve 2'nin seçilme olasılıkları;

$$P_1 = \frac{e^{v_1}}{e^{v_1} + e^{v_2}} = \frac{1}{1 + e^{v_2 - v_1}} \quad \text{ve} \quad P_2 = \frac{e^{v_2}}{e^{v_1} + e^{v_2}} = \frac{1}{1 + e^{v_1 - v_2}}$$

Burada seçeneklerden birinin seçilme olasılığının artması, ilgili seçeneğin belirleyici bileşenin artmasına, diğer seçeneğin belirleyici bileşeninin azalmasına bağlıdır. Ancak bir belirleyici bileşen diğerine göre ne kadar büyük olursa olsun, ilgili seçeneğin seçilme olasılığı 1'e yaklaşırsa da hiçbir zaman tam olarak 1 olamaz.

## ÖRNEK: STOKASTİK YAKLAŞIM

$$U = -0.2 * \text{Süre} - 80 * \frac{\text{Ücret}}{\text{Gelir}}$$

Birey	Günlük gelir	Özel ulaşım (öu)		Toplu taşıma (tt)		Gerçek Tercih	
	(TL)	Süre (dk)	Ücret (TL)	Süre (dk)	Ücret (TL)		
1	479	9	11	15	5		tt
2	520	10	15	20	5	ou	
3	692	9	11	16	5	ou	
4	497	9	11	20	5	ou	
5	379	10	15	17	5		tt
6	349	10	12	15	5		tt
7	621	10	12	20	5	ou	
8	435	9	11	20	5	ou	
9	547	12	15	19	5	ou	
10	346	10	12	15	5		tt



## ÖRNEK: STOKASTİK YAKLAŞIM

Birey	Gerçek Tercih		Model				Senaryo			
	P(öu)	P(tt)	U(öu)	U(tt)	P(öu)	P(tt)	U(öu)	U(tt)	P(öu)	P(tt)
1	0	1	-3.64	-3.84	0.55	0.45	-3.64	-3.24	0.40	0.60
2	1	0	-4.31	-4.77	0.61	0.39	-4.31	-3.97	0.42	0.58
3	1	0	-3.07	-3.78	0.67	0.33	-3.07	-3.18	0.53	0.47
4	1	0	-3.57	-4.80	0.77	0.23	-3.57	-4.00	0.61	0.39
5	1	0	-5.17	-4.46	0.33	0.67	-5.17	-3.86	0.21	0.79
6	0	1	-4.75	-4.15	0.35	0.65	-4.75	-3.55	0.23	0.77
7	1	0	-3.55	-4.64	0.75	0.25	-3.55	-3.84	0.57	0.43
8	1	0	-3.82	-4.92	0.75	0.25	-3.82	-4.12	0.57	0.43
9	1	0	-4.59	-4.53	0.48	0.52	-4.59	-3.93	0.34	0.66
10	0	1	-4.77	-4.16	0.35	0.65	-4.77	-3.56	0.23	0.77
Σ	7	3			5.62	4.38			4.11	5.89

$U_i > U_j$  ise  $P_i > P_j$

Gerçek tercih;

$$P_{\text{öu}} = \%70$$

$$P_{\text{tt}} = \%30$$

Model;

$$P_{\text{öu}} = \%56,2$$

$$P_{\text{tt}} = \%43,8$$

Senaryo;

$$P_{\text{öu}} = \%41,1$$

$$P_{\text{tt}} = \%58,9$$

# KESİKLİ TERCİH MODELLERİ

Discrete Choice Models



TEŞEKKÜRLER  
HAFTAYA GÖRÜŞMEK ÜZERE 😊

---

*Dr. Kadir Berkhan AKALIN*

# KAYNAK GÖSTERME

**Bu sunuma aşağıdaki gibi atıf yapabilirsiniz:**

*Akalın, K.B. (2023). Kesikli Tercih Modelleri Ders Notu. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*

**You can cite this presentation as follows:**

*Akalın, K.B. (2023). Discrete Choice Models Lecture Notes. Eskişehir Osmangazi University Graduate School of Natural and Applied Sciences.*

# KAYNAKLAR

- Akalın, K.B. (2021). *Yolculuk Üretim ve Çekim Modellerinin Rastgele Pişmanlık Minimizasyonu ve Rastgele Fayda Maksimizasyonu Yöntemleri ile Geliştirilmesi*. Doktora Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.
- Ben-Akiva, M., Bierlaire, M. (1999). *Discrete choice methods and their applications to short term travel decisions*. Handbook of transportation science.
- Ben-Akiva, M., Lerman, S. (1985). *Discrete Choice Analysis*, The MIT Press.
- De Dios Ortúzar, J., Willumsen, L.G. (2011). *Modelling Transport*. John Wiley & Sons.
- Frumin, M., Ben-Akiva M. (2008). *Transportation Systems Analysis: Demand And Economics*. MIT Open Courseware.
- Hensher, D.A., Rose, J.M., and Greene, W.H. (2005). *Applied Choice Analysis: A Primer*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Richardson, A.J., Ampt, E.S., and Meyburg, A.H. (2012). *Survey Methods for Transport Planning*, Eucalyptus Press.
- Tezcan, H.O. (2021). *Discrete Choice Modelling in Transportation Lecture Notes*. İstanbul Technical University.
- Tezcan, H.O. (2021). *Transportation Models Lecture Notes*. İstanbul Technical University.
- Train, K. (2002). *Discrete Choice Methods with Simulation*, Cambridge University Press.
- <https://vitalflux.com/logit-vs-probit-models-differences-examples/>