Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

# KESİKLİ TERCİH MODELLERİ

## Discrete Choice Models

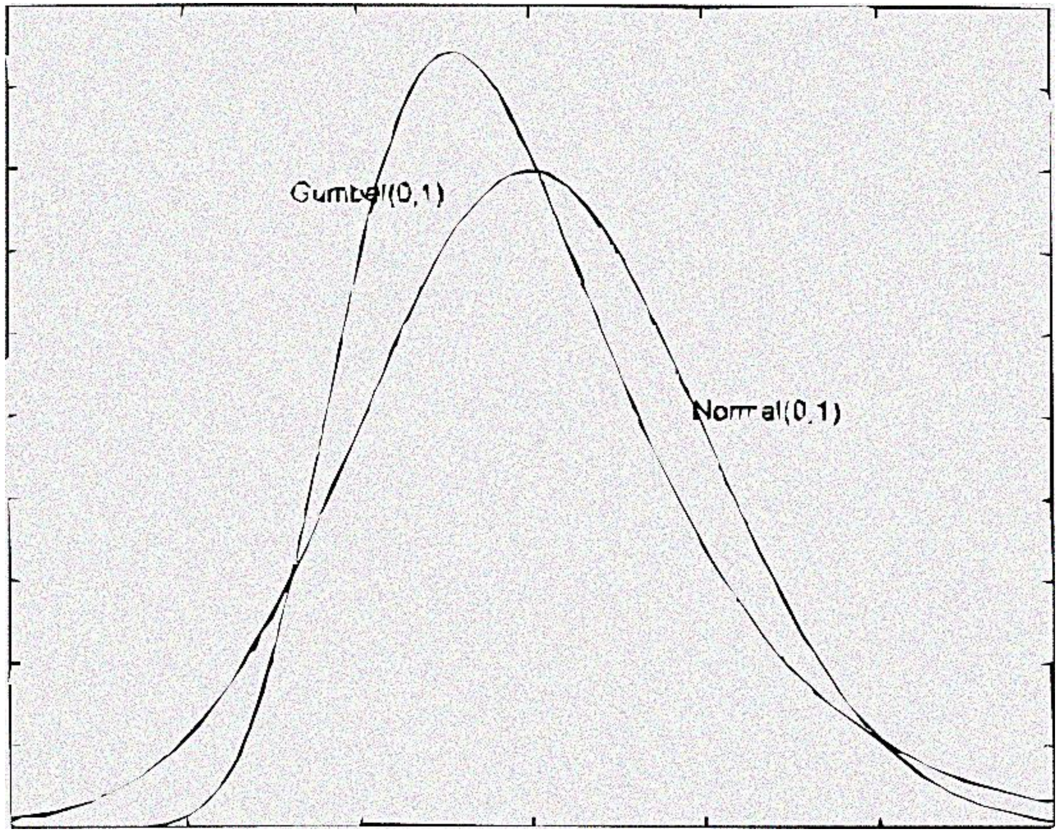
***Dr. Kadir Berkhan AKALIN***

6

# ÇOK TERİMLİ LOJİT MODEL

*MULTINOMIAL LOGIT MODEL*

- Hata terimlerinin varyanslarının Tip-1 Uç Değer (Gumbel) dağılıma uyduğu varsayılır.
- Alternatifler ve gözlemler arasında hata terimleri bağımsız ve özdeş olarak (IID) dağılır.



## SEÇİM OLASILIKLARI

İlgili seçeneğin seçilme olasılığı: $P_i = \frac{e^{v_i}}{\sum e^{v_j}}$

Üç seçeneğin olduğu bir örnek için alternatiflerin seçilme olasılıkları:

$$P_1 = \frac{e^{v_1}}{e^{v_1} + e^{v_2} + e^{v_3}}$$

$$P_2 = \frac{e^{v_2}}{e^{v_1} + e^{v_2} + e^{v_3}}$$

$$P_3 = \frac{e^{v_3}}{e^{v_1} + e^{v_2} + e^{v_3}}$$

# SEÇİM OLASILIKLARI

İlgili seçeneğin seçilme olasılığının farklı bir gösterimi: $P_i = \frac{1}{1+\sum_{j \neq i} e^{v_j - v_i}}$

Üç seçeneğin olduğu bir örnek için alternatiflerin seçilme olasılıkları:

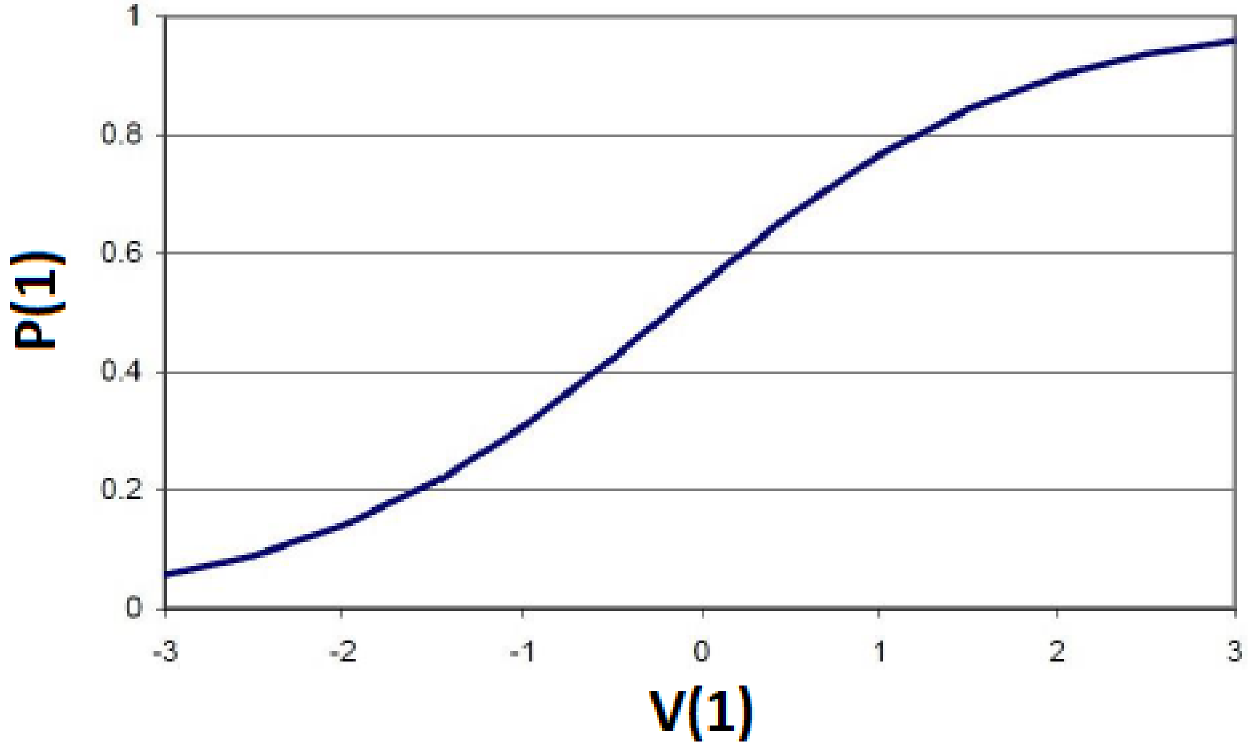
$$P_1 = \frac{e^{v_1}}{e^{v_1} + e^{v_2} + e^{v_3}} \frac{e^{-v_1}}{e^{-v_1}} = \frac{1}{1 + e^{v_2 - v_1} + e^{v_3 - v_1}}$$

$$P_2 = \frac{e^{v_2}}{e^{v_1} + e^{v_2} + e^{v_3}} \frac{e^{-v_2}}{e^{-v_2}} = \frac{1}{1 + e^{v_1 - v_2} + e^{v_3 - v_2}}$$

$$P_3 = \frac{e^{v_3}}{e^{v_1} + e^{v_2} + e^{v_3}} \frac{e^{-v_3}}{e^{-v_3}} = \frac{1}{1 + e^{v_1 - v_3} + e^{v_2 - v_3}}$$

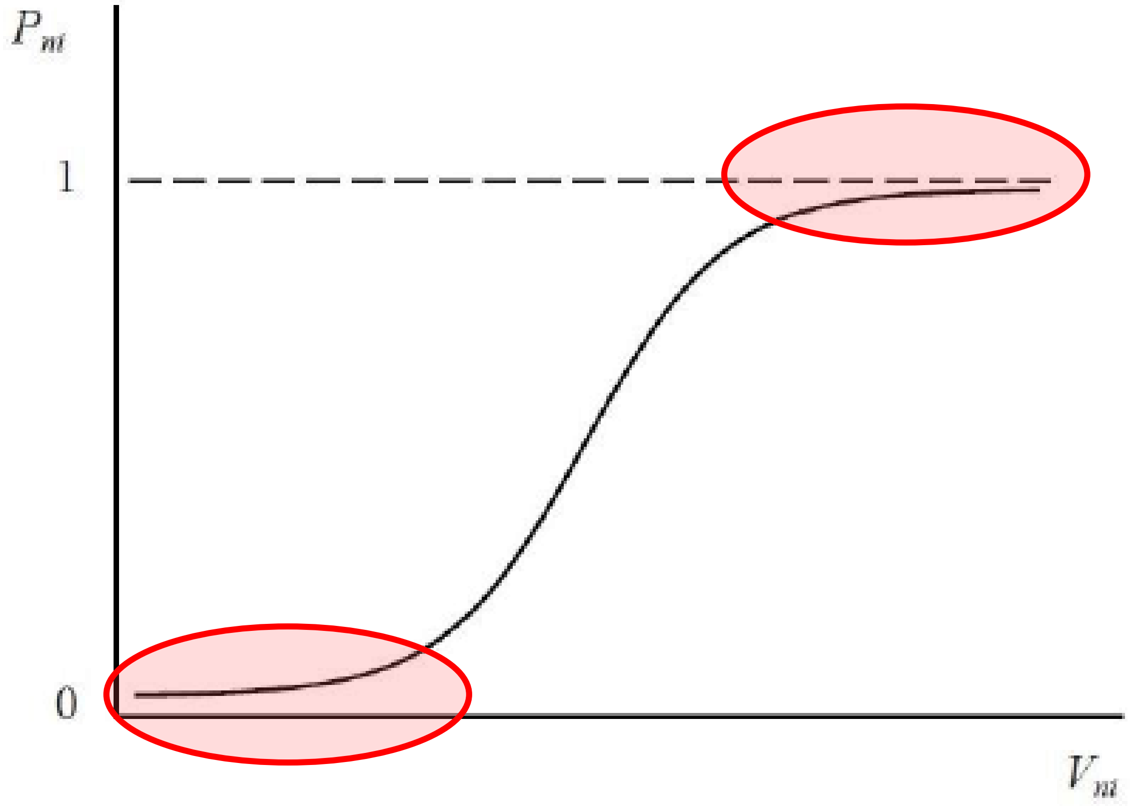
# OLASILIK VE FAYDA DAĞILIMLARI

| Durum | V(1) | V(2) | V(3) | P(1) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **-3.0** | -1.5 | -0.5 | **0.057** |
| 2 | **-1.5** | -1.5 | -0.5 | **0.212** |
| 3 | **0.0** | -1.5 | -0.5 | **0.547** |
| 4 | **1.5** | -1.5 | -0.5 | **0.844** |
| 5 | **3.0** | -1.5 | -0.5 | **0.960** |



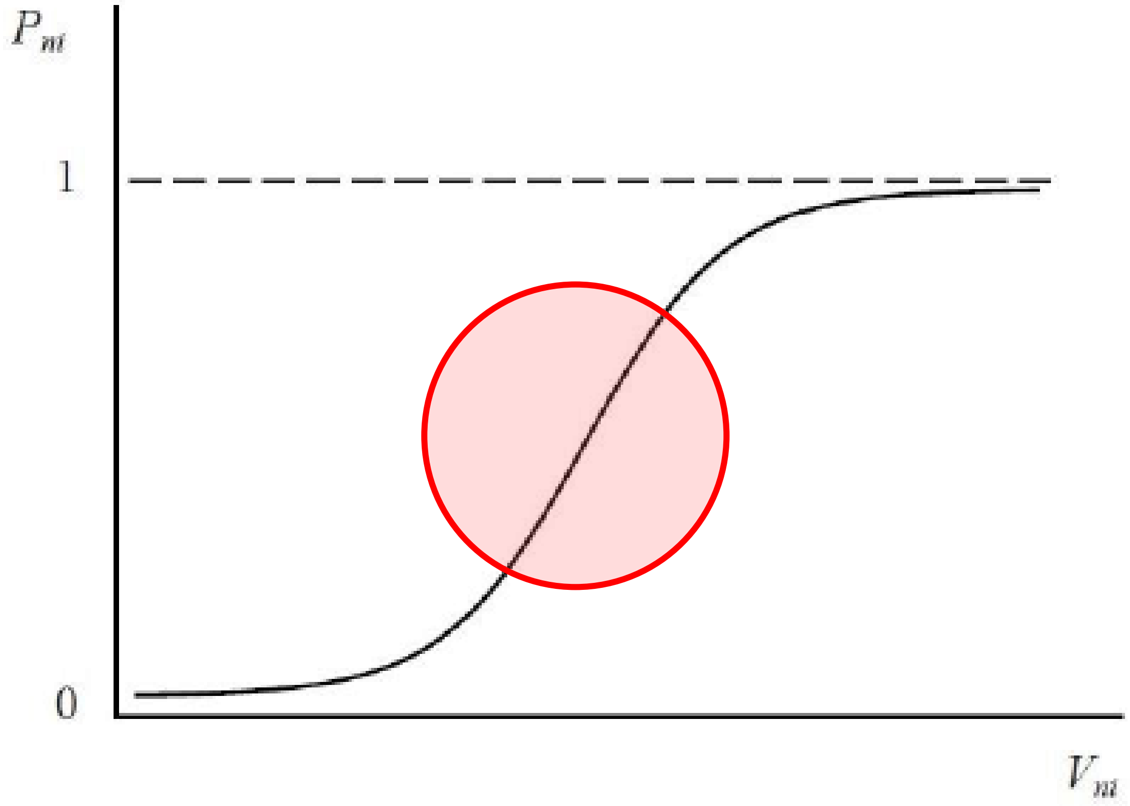
# OLASILIK VE FAYDA DAĞILIMLARI

Bir alternatifin faydası diğer alternatiflere göre çok düşük veya çok yüksek olduğunda, alternatifin faydasındaki küçük bir artışın seçilme olasılığı üzerinde çok az etkisi vardır.



# OLASILIK VE FAYDA DAĞILIMLARI

Faydadaki artışın seçilme olasılığı üzerinde en büyük etkiye sahip olduğu durum olasılığın 0,5 civarında olduğu zamandır. Burada, faydada az bir artış, olasılıkta büyük bir değişikliğe neden olur.



# HATIRLATMA: DETERMİNİSTİK / STOKASTİK YAKLAŞIM

RFM modelinde, **deterministik** ve **stokastik** olmak üzere iki yaklaşım mevcuttur.

Deterministik (belirlenimsel) yaklaşımda bireylerin kesin olarak faydası en yüksek olan seçeneği tercih ettikleri varsayımı yapılırken

Stokastik (olasılıksal) yaklaşımda bireylerin faydası en yüksek olan seçeneği tercih etme olasılığının daha yüksek olduğu varsayılmaktadır

$$\boldsymbol{U_i > U_j} \textbf{ ise } \boldsymbol{U_i} \textbf{ seçilir}$$

$$\boldsymbol{U_i > U_j} \textbf{ ise } \boldsymbol{P_i > P_j}$$

$P_i, P_j$: ilgili seçeneğin ($i$ veya $j$) tercih edilme olasılıklarıdır.

## HATIRLATMA: İKİLİ LOJİT ÖRNEĞİ

İkili lojit için ortak tek bir fayda fonksiyonu ile bir örnek vermiştik:

$$\boldsymbol{v = -0.2 * Süre - 80 * \frac{Ücret}{Gelir}}$$

Yani;

$$\boldsymbol{v_{Otomobil} = -0.2 * Süre - 80 * \frac{Ücret}{Gelir}}$$

$$\boldsymbol{v_{TopluTaşıma} = -0.2 * Süre - 80 * \frac{Ücret}{Gelir}}$$

## HATIRLATMA: İKİLİ LOJİT ÖRNEĞİ

Burada;

$\boldsymbol{v_1 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2}$

$\boldsymbol{v_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2}$ olduğunu fark etmişsinizdir.

Burada aslında ortak katsayıların kullanıldığı bir yöntem tercih edilmişti. Peki başka nasıl bir yaklaşım olabilir?

# MODEL TASARIMI

Katsayıların tahmin modellemesinde iki yaklaşım bulunmaktadır:

- **Genel Katsayılar (Generic Coefficients)**
- **Seçeneğe Özgü Katsayılar (Alternative Specific Coefficients)**

# MODEL TASARIMI

## Genel Katsayılar

$$v_1 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_3 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

ya da

$$v_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_2 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_3 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

## Seçeneğe Özgü Katsayılar

$$v_1 = \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$
$$v_2 = \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$$
$$v_3 = \beta_{31} X_1 + \beta_{32} X_2$$

ya da

$$v_1 = \beta_{01} + \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$
$$v_2 = \beta_{02} + \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$$
$$v_3 = \beta_{03} + \beta_{31} X_1 + \beta_{32} X_2$$

# MODEL TASARIMI

*Genel katsayılar için hepsi aynı sonuçlar vermiyor mu?*

## Genel Katsayılar

$$v_1 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_3 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

ya da

$$v_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_2 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_3 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

## Seçeneğe Özgü Katsayılar

$$v_1 = \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$
$$v_2 = \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$$
$$v_3 = \beta_{31} X_1 + \beta_{32} X_2$$

ya da

$$v_1 = \beta_{01} + \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$
$$v_2 = \beta_{02} + \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$$
$$v_3 = \beta_{03} + \beta_{31} X_1 + \beta_{32} X_2$$

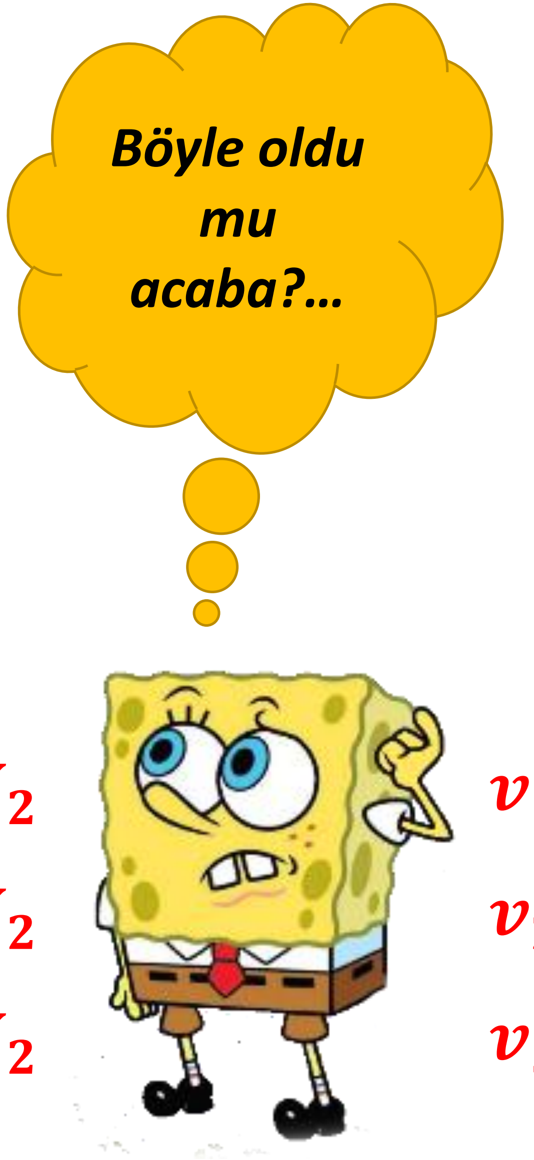
# MODEL TASARIMI

## Genel Katsayılar

$$\cancel{v_1 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2}$$
$$\cancel{v_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2}$$
$$\cancel{v_3 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2}$$

yerine sadece

$$v_1 = \beta_{01} + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_2 = \beta_{02} + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_3 = \beta_{03} + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$




## Seçeneğe Özgü Katsayılar

$$v_1 = \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$
$$v_2 = \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$$
$$v_3 = \beta_{31} X_1 + \beta_{32} X_2$$

ya da

$$v_1 = \beta_{01} + \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$
$$v_2 = \beta_{02} + \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$$
$$v_3 = \beta_{03} + \beta_{31} X_1 + \beta_{32} X_2$$

## MODEL TASARIMI

Üç seçeneğin olduğu bir örneğe bakalım:

$$v_{Otomobil} = v_o = \beta_{o0} + \beta_{og} * Gelir + \beta_{os} * Süre$$

$$v_{TopluTaşıma} = v_{tt} = \beta_{tt0} + \beta_{ttg} * Gelir + \beta_{tts} * Süre$$

$$v_{Yaya} = v_y = \beta_{y0} + \beta_{yg} * Gelir + \beta_{ys} * Süre$$

# MODEL TASARIMI

$$P_i = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i} e^{v_j - v_i}}$$

Burada olasılıkları hesaplamak istersek:

$$v_o - v_y = (\beta_{o0} - \beta_{y0}) + (\beta_{og} - \beta_{yg}) * Gelir + (\beta_{os} - \beta_{ys}) * Süre$$

$$v_{tt} - v_y = (\beta_{tt0} - \beta_{y0}) + (\beta_{ttg} - \beta_{yg}) * Gelir + (\beta_{tts} - \beta_{ys}) * Süre$$

## MODEL TASARIMI

$$P_i = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i} e^{v_j - v_i}}$$

Burada olasılıkları hesaplamak istersek:

$$v_o - v_y = (\beta_{o0} - \beta_{y0}) + (\beta_{og} - \beta_{yg}) * Gelir + (\beta_{os} - \beta_{ys}) * Süre$$

$$v_{tt} - v_y = (\beta_{tt0} - \beta_{y0}) + (\beta_{ttg} - \beta_{yg}) * Gelir + (\beta_{tts} - \beta_{ys}) * Süre$$

Burada aynı katsayıların çıkartıldığı görülüyor. Buradan olasılık hesaplarında

bir değişikliğe yol açmayacağı anlaşılmaktadır.

## MODEL TASARIMI

$$v_o - v_y = (12-2) \ + (8-4) * Gelir \ + (22-10) * Süre$$

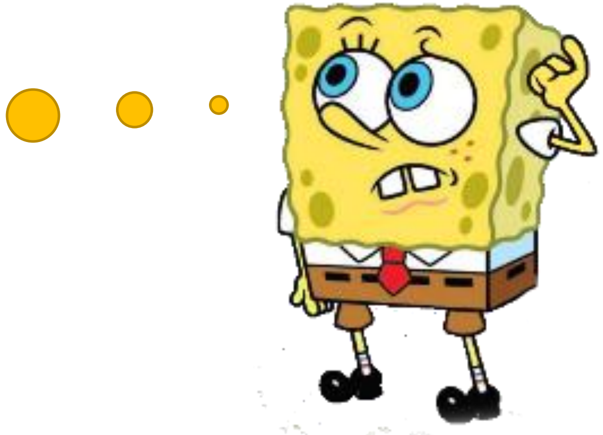
$$v_{tt} - v_y = (10-2) \ + (9-4) * Gelir \ + (23-10) * Süre$$

veya

$$v_o - v_y = (22-12) \ + (18-14) * Gelir \ + (1022-1010) * Süre$$

$$v_{tt} - v_y = (21-12) + (19-14) * Gelir + (1023-1010) * Süre$$

***Bu ikisi aynı değil mi?***
***O zaman gerçek katsayılar ne?***



## MODEL TASARIMI

Genel katsayıları kullanmış olsaydık:

$$v_{Otomobil} = v_o = \beta_{o0} + \beta_g * Gelir + \beta_s * Süre$$

$$v_{TopluTaşıma} = v_{tt} = \beta_{tt0} + \beta_g * Gelir + \beta_s * Süre$$

$$v_{Yaya} = v_y = \beta_g * Gelir + \beta_s * Süre$$

## MODEL TASARIMI

$$P_i = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i} e^{v_j - v_i}}$$

Genel katsayıları kullanmış olsaydık:

$$v_o - v_y = (\beta_{o0} - 0) \;\; + \left(\beta_g - \beta_g\right) * Gelir \;\; + (\beta_s - \beta_s) * Süre$$

$$v_{tt} - v_y = (\beta_{tt0} - 0) + \left(\beta_g - \beta_g\right) * Gelir + (\beta_s - \beta_s) * Süre$$

# MODEL TASARIMI

$$P_i = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i} e^{v_j - v_i}}$$

Genel katsayıları kullanmış olsaydık:

$$v_o - v_y = (\beta_{o0} - 0) + (\beta_g - \beta_g) * Gelir + (\beta_s - \beta_s) * Süre$$

$$v_{tt} - v_y = (\beta_{tt0} - 0) + (\beta_g - \beta_g) * Gelir + (\beta_s - \beta_s) * Süre$$

Sıfıra eşit!

***Peki; 99999-99999=0 mı?***

***3-3=0 mı?***

# MODEL TASARIMI

**Genel Katsayılar**

$$v_1 = \beta_1 X_1 + 0$$
$$v_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_3 = 0 + \beta_2 X_2$$

ya da

$$v_1 = \beta_{01} + 0 + 0$$
$$v_2 = 0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
$$v_3 = \beta_{03} + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

**Seçeneğe Özgü Katsayılar**

$$v_1 = 0 + \beta_{12} X_2$$
$$v_2 = \beta_{21} X_1 + 0$$
$$v_3 = \beta_{31} X_1 + \beta_{32} X_2$$

ya da

$$v_1 = 0 + \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$
$$v_2 = \beta_{02} + 0 + \beta_{22} X_2$$
$$v_3 = \beta_{03} + \beta_{31} X_1 + 0$$

# MODEL TASARIMI

## Genel Katsayılar

$$v_1 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

$$v_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

$$v_3 = 0$$

ya da

$$v_1 = \beta_{01} + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

$$v_2 = \beta_{02} + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

$$v_3 = 0$$

## Seçeneğe Özgü Katsayılar

$$v_1 = \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$

$$v_2 = \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$$

$$v_3 = 0$$

ya da

$$v_1 = \beta_{01} + \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$$

$$v_2 = \beta_{02} + \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$$

$$v_3 = 0$$

**MODEL TAHMİNİ**

En çok kullanılan yöntem en büyük olabilirlik (EBO, maximum likelihood –ML) yöntemidir.

EBO yöntemi, modele bağlı olarak gözlenen seçimlerin olasılığını en büyükleyen model parametrelerini (katsayıları) bulmayı sağlar.

## MODEL TAHMİNİ

Örneğin, iki seçeneğin olduğu bir durumda,

$P(X = 1) = p$ ve $P(X = 0) = 1 - p$

Olduğuna göre ve rassal değişkenlerin Bernoulli dağılımına uyduğu varsayılırsa olasılık fonksiyonu aşağıdaki yazılır:

$$f(x) = p^x(1 - p)^{(1-x)}$$

## MODEL TAHMİNİ

Toplam olasılık aşağıdaki gibi hesaplandığına göre;

$$\left(p^{x_1}(1-p)^{(1-x_1)}\right)\left(p^{x_2}(1-p)^{(1-x_2)}\right)\ldots\left(p^{x_n}(1-p)^{(1-x_n)}\right)$$

$$= p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$

$$= L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)$$

## MODEL TAHMİNİ

Hesap kolaylığı için aşağıdaki ifadenin doğal logaritması alınabilir. Burada olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritmasını en büyükleyen p değeri, aynı zamanda L(p) olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden p değeridir. Bu ifadeye Log-olabilirlik (log-likelihood) fonksiyonu adı verilir.

$$\ln\big(L(\theta)\big) = \sum x_i \ln(p) + \left(n - \sum x_i\right)\ln(1-p)$$

# MODEL TAHMİNİ

T bireyin J alternatif arasından seçim yaptığı bir örnek için parametre tahmini aşağıdaki log-olabilirlik fonksiyonunu en büyükleyerek yapılır:

***Gerçek seçim***

***Model tahmini***

$$LL(\beta) = \sum_{\forall t \in T} \sum_{\forall j \in J} \delta_{jt} \ln(P_{jt})$$

Burada; $\delta_{jt}$: ilgili birey tarafından ilgili alternatif seçildiyse 1 değilse 0

$P_{jt}$: ilgili birey tarafından ilgili alternatifin seçilme olasılığı

# KESİKLİ TERCİH MODELLERİ

Discrete Choice Models

# TEŞEKKÜRLER
# HAFTAYA GÖRÜŞMEK ÜZERE ☺

***Dr. Kadir Berkhan AKALIN***

# KAYNAK GÖSTERME

Bu sunuma aşağıdaki gibi atıf yapabilirsiniz:
*Akalın, K.B. (2023). Kesikli Tercih Modelleri Ders Notu. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*

You can cite this presentation as follows:
*Akalın, K.B. (2023). Discrete Choice Models Lecture Notes. Eskisehir Osmangazi University Graduate School of Natural and Applied Sciences.*

# KAYNAKLAR


- *Akalın, K.B. (2021). Yolculuk Üretim ve Çekim Modellerinin Rastgele Pişmanlık Minimizasyonu ve Rastgele Fayda Maksimizasyonu Yöntemleri ile Geliştirilmesi. Doktora Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.*
- *Ben-Akiva, M., Bierlaire, M. (1999). Discrete choice methods and their applications to short term travel decisions. Handbook of transportation science.*
- *Ben-Akiva, M., Lerman, S. (1985). Discrete Choice Analysis, The MIT Press.*
- *De Dios Ortúzar, J., Willumsen, L.G. (2011). Modelling Transport. John Wiley & Sons.*
- *Frumin, M., Ben-Akiva M. (2008). Transportation Systems Analysis: Demand And Economics. MIT Open Courseware.*
- *Hensher, D.A., Rose, J.M., and Greene, W.H. (2005). Applied Choice Analysis: A Primer, Cambridge University Press, Cambridge, UK.*
- *Richardson, A.J., Ampt, E.S., and Meyburg, A.H. (2012). Survey Methods for Transport Planning, Eucalyptus Press.*
- *Tezcan, H.O. (2021). Discrete Choice Modelling in Transportation Lecture Notes. İstanbul Technical University.*
- *Tezcan, H.O. (2021). Transportation Models Lecture Notes. İstanbul Technical University.*
- *Train, K. (2002). Discrete Choice Methods with Simulation, Cambridge University Press.*