Temel Yapılar: Kümeler, Fonksiyonlar, Diziler ve Toplamlar

CSC-2259 Ayrık Yapılar

Kümeler

Küme, nesnelerin düzensiz toparlanmasıdır

İngiliz alfabesindeki sesli harfler: $V = \{a, e, i, o, u\}$

$a \in V \qquad b \notin V$

10 küçük pozitif tek sayılar:

$$O = \{1,3,5,7,9\}$$

Kümenin elemanları
Kümenin üyeleri

Diğer Küme Gösterimleri

100 küçük pozitif tam sayıların kümesi:

$$\{1,2,3,\ldots,99\}$$

Atlanan öğeler

10 küçük pozitif tek sayılar:

$$O = \{1,3,5,7,9\}$$

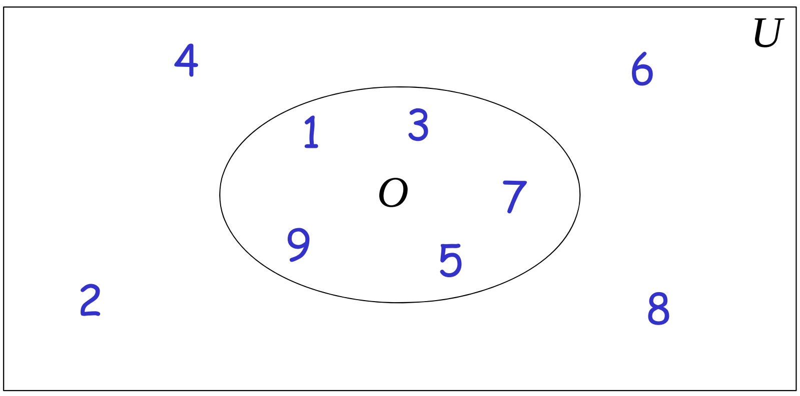
$$O = \{x \mid x\, 10'\text{dan küçük pozitif tek sayilar}\}$$

$$O = \{x \in Z^{+} \mid x \text{ teksayi ve } x < 10\}$$

Konstantin Busch - LSU 3

Venn Şeması

Evrensel küme



$$U = \{x \mid x\, 10'\text{da küçük pozitif tam sayilardıa}\}$$

$$O = \{x \mid x\, 10'\text{da küçük pozitif tek sayıayılar}\}$$

Konstantin Busch - LSU 4

Temel kümeler

$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$ Doğal sayılar

$Z = \{\ldots,-2,1,0,1,2,\ldots\}$ Tam sayılar

$Z^{+} = \{1,2,3,\ldots\}$ Pozitif tam sayılar

$Q = \{p/q \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}$ Rasyonel sayılar

$R = \{\text{Reel sayilar kümesi}\}$ Real sayılar

Boş küme

$$\varnothing = \{\,\}$$

$$\varnothing \neq \{\varnothing\}$$

Kümenin kapasitesi (boyutu)

Sonlu Kümeler	Eleman sayısı
$S_1 = \{a, e, i, o, u\}$	$\lvert S_1 \rvert = 5$
$S_2 = \{a, b, c, \ldots, z\}$	$\lvert S_2 \rvert = 26$
$S_3 = \{1,2,3,\ldots,99\}$	$\lvert S_3 \rvert = 99$

$$\lvert \varnothing \rvert = \lvert \{\} \rvert = 0 \qquad \lvert \{\varnothing\} \rvert = 1$$

Sonsuz kümler $N = \{0,1,2,3,\ldots\}$ Sonsuz boyut

Eşit Küme

$$A = B$$

$$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Örnek: $\{1,3,5\} = \{3,5,1\}$

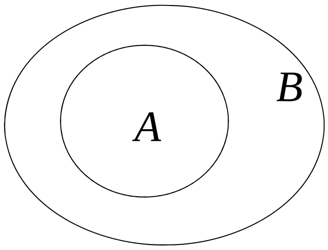
$$\{1,3,5\} = \{1,3,3,3,5,5,5,5\}$$

$$\{1,3,5,7,9\} = \{x \in Z^+ \mid x \text{ tek sayi ve } x < 10\}$$

Alt küme

$$A \subseteq B$$

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

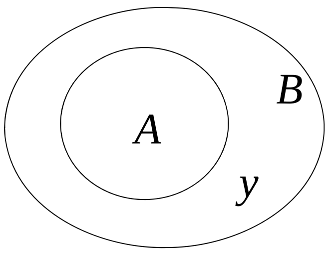


Örnek: $\{1,3,5\} \subseteq \{0,1,3,5\}$ $\quad N \subseteq Z$

Her hangi bir S kümesi için: $S \subseteq S$ $\quad \varnothing \subseteq S$

Öz alt küme

$$A \subset B$$



$$A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B \wedge \exists y(y \in B \wedge y \notin A))$$

Örnek: $\{1,3,5\} \subset \{0,1,3,5\}$ $\quad N \subset Z$

Açıklama: Bir kümenin kendisinden farklı her bir alt kümesine öz alt küme denir.

$$A = B$$

is equivalent to

$$A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A$$

Güç kümesi

S kümesinin gücü, S'nin olası bütün alt kümeleri ve boş kümeyi içerir.

$S = \{1,2,3\}$

Güç kümesi

$$P(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\underbrace{|P(S)| = 2^{|S|}}_{\text{Güç kümesinin büyüklüğü}} = 2^3 = 8$$

Özel durum

$$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

$$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

Katlı mertebeler (ilişkiler)

n-katlı mertebeler $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Elemanların sıralı listesi

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ iff } \forall i (a_i = b_i)$$

If and only if
(ancak ve ancak)

Örnek: $(1,2) \neq (2,1)$

Kartezyen Çarpım

İki kümenin Kartezyen çarpımı A, B

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Örnek: $A = \{1,2\}$ $B = \{a,b,c\}$

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$B \times A = \{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$$

Bu durum için: $A \times B \neq B \times A$

Boyut: $|A \times B| = |A| \times |B| = 2 \times 3 = 6$

Kümelerde Kartezyen çarpım $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

Örnek: $A = \{1,2\}$ $B = \{a,b,c\}$ $C = \{x,y\}$

$$A \times B \times C = \{(1,a,x),(1,b,x),(1,c,x),(2,a,x),(2,b,x),(2,c,x),$$
$$(1,a,y),(1,b,y),(1,c,y),(2,a,y),(2,b,y),(2,c,y)\}$$

Boyut: $|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C| = 2 \times 3 \times 2 = 12$

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

Kümeler ve Önermeler

$\forall x (x \in S \rightarrow P(x))$ için kısaca $\forall x \in S (P(x))$

$\exists x (x \in S \wedge P(x))$ için kısaca $\exists x \in S (P(x))$

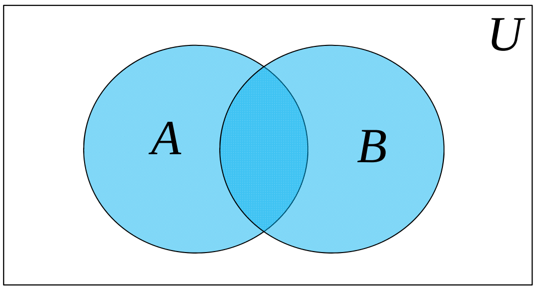
Önermenin doğruluk kümesi $P(x)$

$$\{x \in \text{Domain} \mid P(x)\}$$

uygun P(x) domain (tanım kümesi)
tüm elemanları

Kümelerde Operatörler

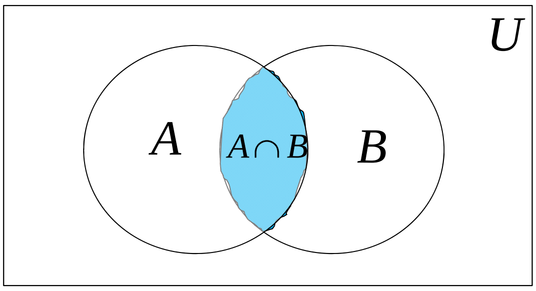
Birleşme $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



$A = \{1,3,5\}$ $B = \{1,2,3\}$ $A \cup B = \{1,2,3,5\}$

Kesişim

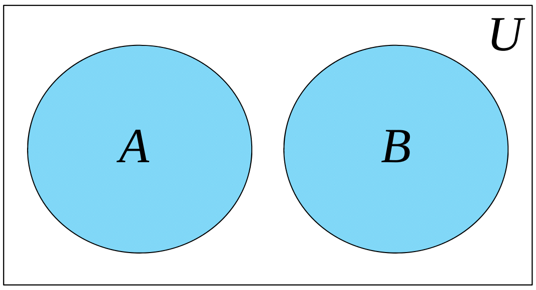
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



$A = \{1,3,5\}$ $B = \{1,2,3\}$ $A \cap B = \{1,3\}$

Ayrık kümeler A, B

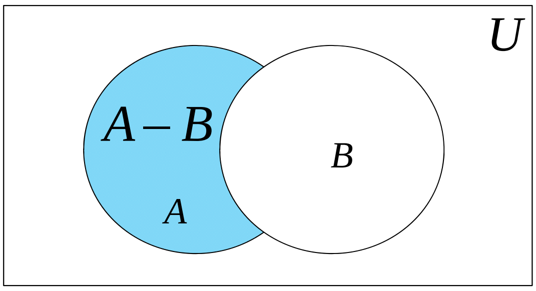
$$A \cap B = \varnothing$$



$A = \{1,3,5\}$ $B = \{2,9\}$ $A \cap B = \varnothing$

Fark kümesi

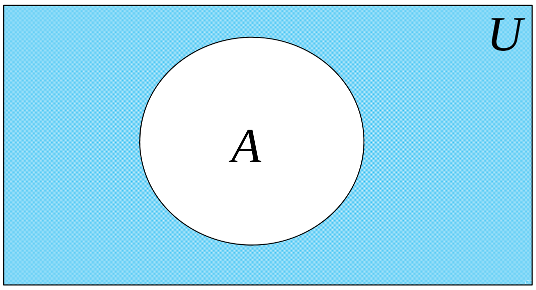
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



$A = \{1,3,5\}$ $B = \{1,2,3\}$ $A - B = \{5\}$

Tümleyen

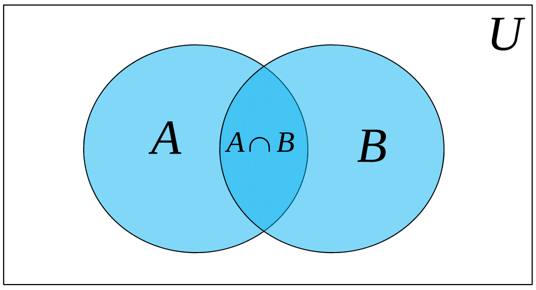
$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



$A = \{1,3,5\}$ $U = \{1,2,3,4,5\}$ $\overline{A} = \{2,4\}$

Birleşimin büyüklüğü

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$A = \{1,3,5\}$ $B = \{1,2,3\}$ $A \cup B = \{1,2,3,5\}$ $A \cap B = \{1,3\}$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 3 - 2 = 4$$

De Morgan Kuralları

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Teorem: $$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

İspat: Gösteriniz ki $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ ve $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

Bölüm 1: $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

$x \in \overline{A \cap B}$

$\rightarrow x \notin A \cap B \rightarrow \neg(x \in A \cap B)$ De Morgan's law from logic

$\rightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) \rightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$

$\rightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \rightarrow (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})$

$\rightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$

Bölüm 2: $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

$$x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$$
$$\rightarrow (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \rightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$$
$$\rightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \rightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B))$$
$$\rightarrow \neg(x \in A \cap B)$$

De Morgan's law from logic

$$\rightarrow x \in \overline{A \cap B}$$

İspatın sonu

Küme tanımlayıcıları

Özdeşlik ilkesi

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap U = A$$

Domination laws

$$A \cup U = U$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Eş güçlülük yasası

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

Tümleme yasası

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Tümleyen yasası

$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

De Morgan's laws

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Değişme yasası

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Birleşme yasası

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Yutma yasası

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Dağılma yasası

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Genelleştirilmiş birleşme ve kesişim

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Örnek: $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = A_1 = \{1,2,3,\ldots\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

Kümelerin bilgisayarda gösterimi

İkili dizgeler olarak kümelerin gösterimi

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$A = \{1,3,5,7,9\}$ 1010101010

$B = \{2,4,6,8,10\}$ 0101010101

Set operations become binary string operations

$A = \{1,2,3,4,5\}$ 1111100000

$B = \{1,3,5,7,9\}$ 1010101010

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$ 1111101010

Bit bit OR

$A \cap B = \{1,3,5\}$ 1010100000

Bit bit AND

Powerset $P(S)$ of $S = \underbrace{\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n\}}_{n \text{ elements}}$

$P(S)$ $\overbrace{}^{n \text{ bits}}$

$\varnothing :$ 0000000000

$\{a_1\}:$ 1000000000

$\{a_2\}:$ 0100000000

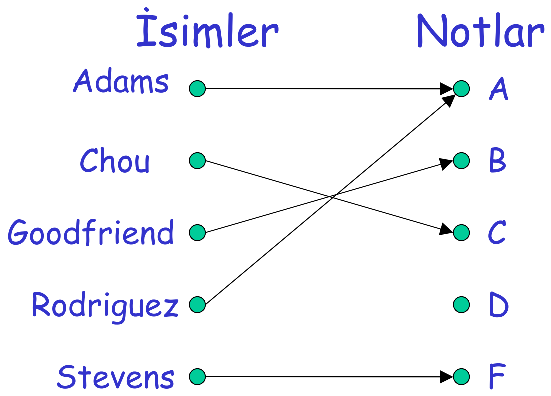
$\vdots$

$S:$ 1111111111

2^n combinations

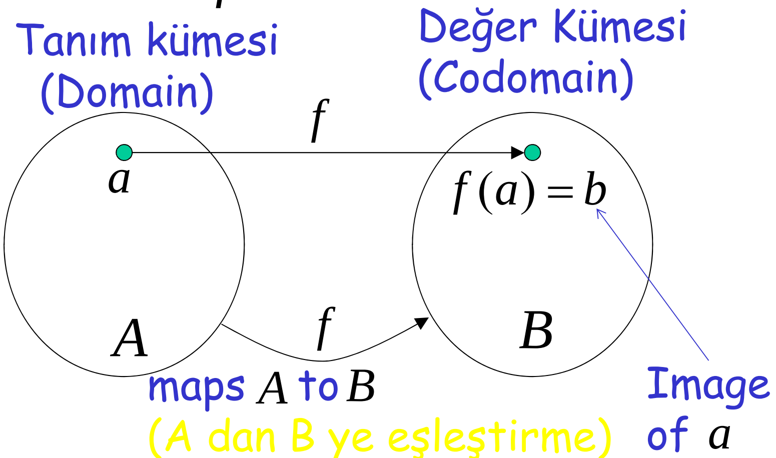
$$|P(S)| = 2^n = 2^{|S|}$$

Fonksiyonlar

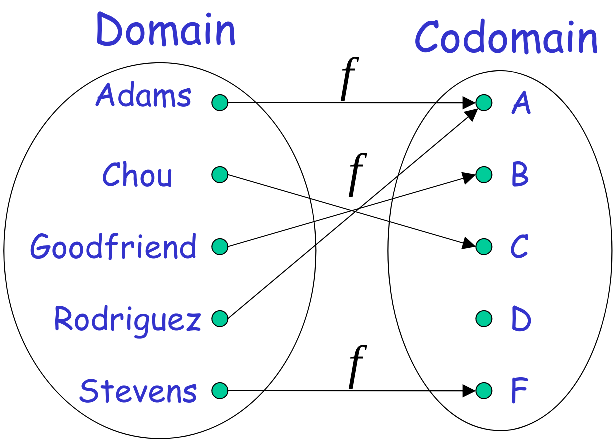


$$f(\text{Chou}) = C \qquad f(\text{Rodriguez}) = A$$

$$f : A \to B$$



Tanım kümesinin her elmanın tam bir görüntü vardır.



$$\text{Domain} = \{\text{Adams}, \text{Chou}, \text{Goodfriend}, \text{Rodriguez}, \text{Stevens}\}$$

$$\text{Codomain} = \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, \text{F}\}$$

$\text{Range} = \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{F}\}$ Tüm görüntülerin kümesi

$$f : Z \to Z$$

$$f(x) = x^2$$

$$\text{Domain} = \text{Z}$$

$$\text{Codomain} = \text{Z}$$

$$\text{Range} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$$

Eşit Fonksiyonlar

$f : A \to B$ $\qquad$ $g : C \to D$

$$f = g$$

$A = C$ aynı domain

$B = D$ aynı codomain

$\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$ aynı mapping

Bazı programlama dillerinde,
domain and codomain açıkça tanımlanır

```
int f(int a) {
      return a*a;
}
```

Toplama ve Çarpma Fonksiyonu

Real sayılar

$f_1 : A \to R$ $\qquad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$f_2 : A \to R$ $\qquad (f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$

Örnek: $\quad f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = x - x^2$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4$$

Kümenin Görüntüsü

S Kümesi $\qquad f(S) = \{t \mid \exists x \in S(t = f(x))\}$

$$= \{f(x) \mid x \in S\}$$

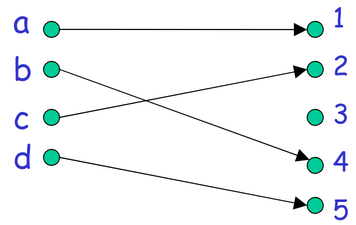
Örnek: $\quad f(x) = x^2$

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

(One-to-one) Birebir fonksiyon

Domain deki her x, y için

$f(x) = f(y)$ implies $x = y$



Range nin her bir elemanı domanın bir elemanının imajıdır.

Örnek: $f(x) = x + 1$ bire birdir

$g(x) = x^2$ birebir değildir: $g(-1) = g(1) = 1$

Konstantin Busch - LSU 41

Artan fonksiyon: $x < y \rightarrow f(x) \leq f(y)$

Kesin artan: $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$

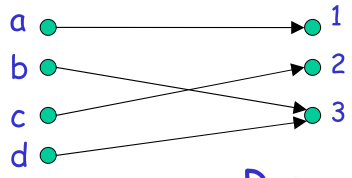
Kesin artan fonksiyonlar birebirdir (one-to-one)

Konstantin Busch - LSU 42

Onto (örten) fonksiyon $f : A \to B$

Her $y \in B$ için $x \in B$ dir.

$f(x) = y$



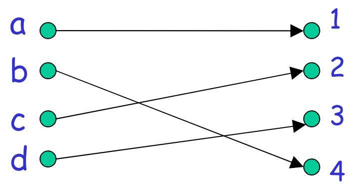
Range = Codomain

Örnek: $f(x) = x + 1$ Onto (örten) dır.

$g(x) = x^2$ Onto değildir. $\forall x \in Z, g(x) \neq -1$

One-to-one benzer (birebir ve örten) fonksiyon

Hem one-to-one hem de onto fonksiyonlardır.

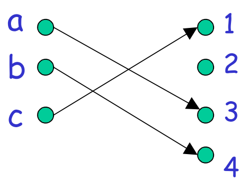


Örnek: $f(x) = x + 1$ Birbir ve örtendir

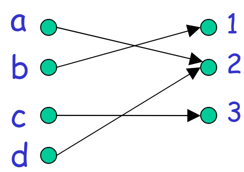
$g(x) = x^2$ Birebir ve örten değildir

Özdeşlik fonksiyonu $\iota_A(x) = x$ birebir ve örtendir.

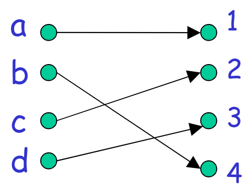
one-to-one
not onto



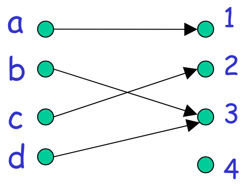
not one-to-one
onto



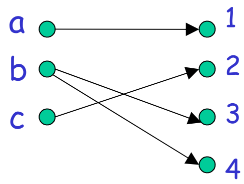
one-to-one
onto



not one-to-one
not onto

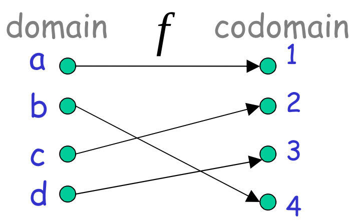


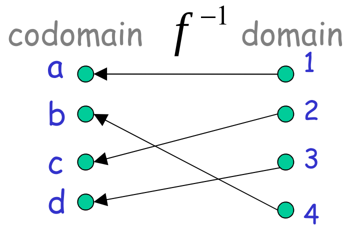
not a function



f birebir ve örten fonksiyonun tersi f^{-1}

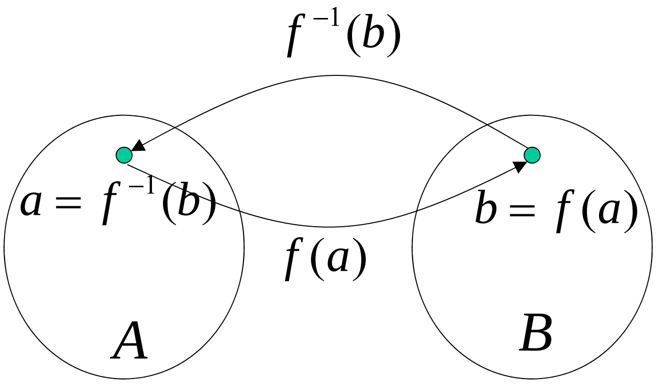
$$f(x) = y \quad \text{iken} \quad f^{-1}(y) = x$$





f tersinir fonksiyondur

Örnek: $f(x) = x + 1 \qquad f^{-1}(y) = y - 1$



Fonksiyonların kompozisyonu

$f : B \rightarrow C$

$g : A \rightarrow B$

$f \circ g : A \rightarrow C$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Örnek: $f(x) = 2x$ $\quad$ $g(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

Özdeşlik fonksiyonu

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$$

Suppose $f(x) = y$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

Alt ve Üst

x Real sayıyı göstermek üzere

Alt fonksiyon: $\lfloor x \rfloor$ x küçük veya eşit olan en büyük tam sayı

Üst fonksiyon: $\lceil x \rceil$ x büyük veya eşit olan en küçük tam sayı

Örnek: $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$ $\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1$ $\lfloor -3.1 \rfloor = -4$ $\lceil -3.1 \rceil = -3$

Faktoriyel fonksiyon

$$f : N \rightarrow Z^+ \qquad f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$f(0) = 0! = 1$$

$$1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 = 2 \qquad 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 760$$

$$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 19 \cdot 20 = 2{,}432{,}902{,}008{,}176{,}640{,}000$$

Stirling's formula: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Diziler

Dizi: function from a subset of integers to a set S

Sonlu dizi

2, 4, 6, 8, 10

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

$$f(n) = a_n$$

$$f(1) = a_1 = 2$$

$$f(5) = a_5 = 10$$

Sonsuz dizi

1,3,9,27,81,...

Alternatif gösterim

$$a_n = 3^k, \quad k \geq 0$$

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

$$= 1,3,9,27,81, \ldots$$

Sonlu diziler: $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Dizi: $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$

Dizinin bütün elemanları bir birine eklenir.

Dizinin uzunluğu: $|a_1 a_2 \cdots a_n| = n$

Boş diziler (null): λ $|\lambda| = 0$

Aritmetik diziler

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$$

Başlangıç terimi a

Ortak fark d

Örnek: $n=0$ Başlangıcı ile $\{s_n\} = -1 + 4n$

$$-1, 3, 7, 11, \ldots$$

Geometrik diziler

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$$

Başlangıç ifadesi a

Ortak oran r

Örnek: $n = 0$ ile başlar $\{c_n\} = 2 \cdot 5^n$

$$2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$$

Toplamlar

Dizi: $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$

Toplam: $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = \sum_{i=m}^{n} a_i$

Örnek: $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

Theorem: $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proof:
$$\begin{array}{lccccccc}
\{a_n\} = & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\
\{b_n\} = & n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\
\{c_n\} = & n+1 & n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 & n+1
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \\ n(n+1) = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 2S \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

End of Proof

Teorem: Eğer a, r reel sayı ve $r \notin \{0,1\}$, ise

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$$

İspat: Let $S = \sum_{i=0}^{n} ar^i$

$$
\begin{aligned}
rS &= r\sum_{i=0}^{n} ar^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} ar^{i+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} ar^k\right) + (ar^{n+1} - a) \\
&= S + (ar^{n+1} - a)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad rS = S + (ar^{n+1} - a)$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

İspat sonu

Yaygın olarak kullanılan toplam ifadeleri:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, \quad r \notin \{0,1\}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1$$

Sayılabilir Kümeler

Sayılabilir Sonlu Küme:

Her hangi bir sonlu küme varsayılan olarak sayılabilirdir.

Sayılabilir Sonsuz Küme:

Eğer S de Z^+'ye bire bir örten ilişki var ise sonsuz S kümesi sayılabilirdir.

Pozitif tam sayılar

Teorem: Pozitif çift sayılar sayılabilirdir.

İspat:

Pozitif çift tam sayılar: $2, \ 4, \ 6, \ 8, \ \ldots$

Bire bir ilişki: $\updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow$

Pozitif tam sayılar $1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots$

n, 2n'e karşılık gelir

İspat sonu

Teorem: Rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir.

İspat:

Bizim listeleme yapacak bir metot bulmaya ihtiyacımız var.

Bütün rasyonel sayılar: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$

Naïve Yaklaşımı

Keyfi olarak 1 ile başlayalım

Rasyonel sayılar: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Bire bir ilişki: $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

Pozitif tam sayılar: $1, 2, 3, \ldots$

İş yapmaz:

Asla keyfi olarak 2 ile başlayarak listelenmez: $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$

Daha iyi bir yaklaşım: diagonal tarama

Nominal=1 $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\cdots$

Nominal=2 $\frac{2}{1}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\cdots$

Nominal=3 $\frac{3}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\cdots$

Nominal=4 $\frac{4}{1}$ $\cdots$

birinci diagonal

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\cdots$

$\frac{2}{1}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\cdots$

$\frac{3}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\cdots$

$\frac{4}{1}$ $\cdots$

ikinci diagonal

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots & \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \cdots & & \\
\frac{4}{1} & \cdots & & &
\end{array}
$$

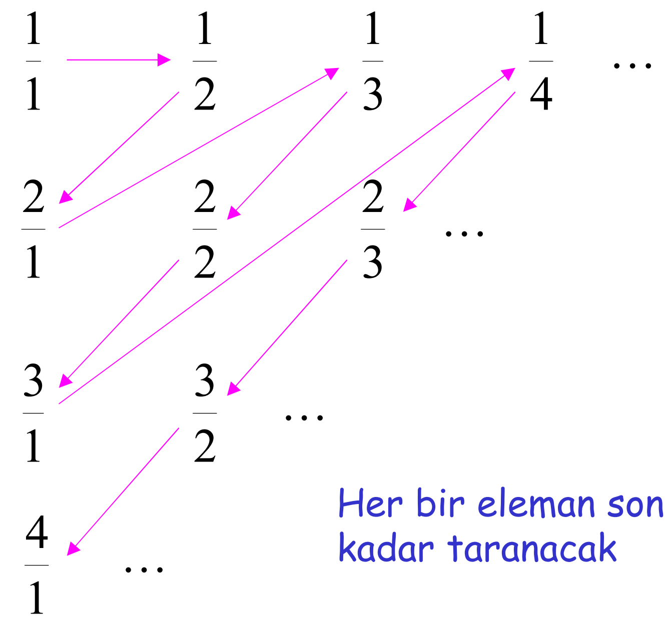
Konstantin Busch - LSU 67

üçüncü diagonal

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots & \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \cdots & & \\
\frac{4}{1} & \cdots & & &
\end{array}
$$

Konstantin Busch - LSU 68

dördüncü diagonal…



Her bir eleman sonuna kadar taranacak

Diagonal liste

Rasyonel sayılar: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \ldots$

Bire bir ilişki:

Pozitif tam sayılar: $1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5, \; \ldots$

İspat sonu

Teorem:

$S = (0,1) \subseteq R$ kümesi sayilmazdir.

İspat: S kümesinin sayılabilir olduğunu varsayalım,

sonra elemanlarını sıralayalım

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$$

S'nın elemanları

S=(0,1) kümesinin elemanlarının listesi

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
s_1 & = & 0 & . & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 & \cdots \\
s_2 & = & 0 & . & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 1 & \cdots \\
s_3 & = & 0 & . & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & \cdots \\
s_4 & = & 0 & . & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & \cdots \\
s_5 & = & 0 & . & 4 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 1 & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
s_1 & = & 0 & . & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 & \cdots \\
s_2 & = & 0 & . & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 1 & \cdots \\
s_3 & = & 0 & . & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & \cdots \\
s_4 & = & 0 & . & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & \cdots \\
s_5 & = & 0 & . & 4 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 1 & \cdots \\
\vdots
\end{array}
$$

Diagonal tabanlı yeni eleman listesi oluşturu

$$t = 0 \,.\, x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6 \; x_7 \; x_8 \; x_9 \; x_{10} \; \cdots$$

Konstantin Busch - LSU 73

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
s_1 & = & 0 & . & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 & \cdots \\
s_2 & = & 0 & . & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 1 & \cdots \\
s_3 & = & 0 & . & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & \cdots \\
s_4 & = & 0 & . & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & \cdots \\
s_5 & = & 0 & . & 4 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 1 & \cdots \\
\vdots
\end{array}
$$

Eğer diagonal eleman «0» ise dijit «1» e dönüştürülür.

$$t = 0 \,.\, 1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6 \; x_7 \; x_8 \; x_9 \; x_{10} \; \cdots$$

Konstantin Busch - LSU 74

$$\begin{array}{llllllllllllll}
s_1 & = & 0 & . & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 & \cdots \\
s_2 & = & 0 & . & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 1 & \cdots \\
s_3 & = & 0 & . & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & \cdots \\
s_4 & = & 0 & . & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & \cdots \\
s_5 & = & 0 & . & 4 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 1 & \cdots \\
\vdots
\end{array}$$

Eğer diagonal eleman «0» değil ise dijit «0» e dönüştürülür.

$$t = 0 \,.\, 1 \;\; 0 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\; x_6 \;\; x_7 \;\; x_8 \;\; x_9 \;\; x_{10} \;\; \cdots$$

Konstantin Busch - LSU 75

$$\begin{array}{llllllllllllll}
s_1 & = & 0 & . & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 & \cdots \\
s_2 & = & 0 & . & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 1 & \cdots \\
s_3 & = & 0 & . & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & \cdots \\
s_4 & = & 0 & . & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & \cdots \\
s_5 & = & 0 & . & 4 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 1 & \cdots \\
\vdots
\end{array}$$

Eğer diagonal eleman «0» ise dijit «1» e dönüştürülür.

$$t = 0 \,.\, 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\; x_6 \;\; x_7 \;\; x_8 \;\; x_9 \;\; x_{10} \;\; \cdots$$

Konstantin Busch - LSU 76

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
s_1 & = & 0 & . & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 & \cdots \\
s_2 & = & 0 & . & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 1 & \cdots \\
s_3 & = & 0 & . & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & \cdots \\
s_4 & = & 0 & . & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & \cdots \\
s_5 & = & 0 & . & 4 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 1 & \cdots \\
\vdots
\end{array}
$$

Eğer diagonal eleman «0» ise dijit «1» e dönüştürülür.

$$t = 0 \; . \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 \; x_5 \; x_6 \; x_7 \; x_8 \; x_9 \; x_{10} \; \cdots$$

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
s_1 & = & 0 & . & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 & \cdots \\
s_2 & = & 0 & . & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 1 & \cdots \\
s_3 & = & 0 & . & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & \cdots \\
s_4 & = & 0 & . & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & \cdots \\
s_5 & = & 0 & . & 4 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 1 & \cdots \\
\vdots
\end{array}
$$

Eğer diagonal eleman «0» değilse ise dijit «0» e dönüştürülür.

$$t = 0 \; . \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 \; 0 \; x_6 \; x_7 \; x_8 \; x_9 \; x_{10} \; \cdots$$

$$
\begin{array}{lcl}
s_1 & = & 0\;.\;0\;1\;4\;5\;2\;9\;4\;2\;1\;6\;\cdots \\
s_2 & = & 0\;.\;1\;2\;1\;3\;2\;1\;5\;7\;3\;1\;\cdots \\
s_3 & = & 0\;.\;1\;3\;0\;2\;0\;5\;3\;1\;8\;4\;\cdots \\
s_4 & = & 0\;.\;3\;2\;1\;0\;0\;3\;2\;1\;1\;3\;\cdots \\
s_5 & = & 0\;.\;4\;6\;1\;8\;4\;2\;1\;5\;2\;1\;\cdots \\
\vdots & &
\end{array}
$$

İşlemi yineleyerek yeni numara elde ederiz.

$$t = 0\;.\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;\cdots \in (0,1)$$

Konstantin Busch - LSU 79

$$
\begin{array}{lcl}
s_1 & = & 0\;.\;0\;1\;4\;5\;2\;9\;4\;2\;1\;6\;\cdots \\
s_2 & = & 0\;.\;1\;2\;1\;3\;2\;1\;5\;7\;3\;1\;\cdots \\
s_3 & = & 0\;.\;1\;3\;0\;2\;0\;5\;3\;1\;8\;4\;\cdots \\
s_4 & = & 0\;.\;3\;2\;1\;0\;0\;3\;2\;1\;1\;3\;\cdots \\
s_5 & = & 0\;.\;4\;6\;1\;8\;4\;2\;1\;5\;2\;1\;\cdots \\
\vdots & &
\end{array}
$$

Gözlem: $t \neq s_1$ (ilk dijit farklı)

$$t = 0\;.\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;\cdots$$

Konstantin Busch - LSU 80

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 0\ .\ 0\ 1\ 4\ 5\ 2\ 9\ 4\ 2\ 1\ 6\ \cdots \\
s_2 &= 0\ .\ 1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 5\ 7\ 3\ 1\ \cdots \\
s_3 &= 0\ .\ 1\ 3\ 0\ 2\ 0\ 5\ 3\ 1\ 8\ 4\ \cdots \\
s_4 &= 0\ .\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 3\ 2\ 1\ 1\ 3\ \cdots \\
s_5 &= 0\ .\ 4\ 6\ 1\ 8\ 4\ 2\ 1\ 5\ 2\ 1\ \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Gözlem: $t \neq s_2$ (ikinci dijit farklı)

$$t = 0\ .\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \cdots$$

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 0\ .\ 0\ 1\ 4\ 5\ 2\ 9\ 4\ 2\ 1\ 6\ \cdots \\
s_2 &= 0\ .\ 1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 5\ 7\ 3\ 1\ \cdots \\
s_3 &= 0\ .\ 1\ 3\ 0\ 2\ 0\ 5\ 3\ 1\ 8\ 4\ \cdots \\
s_4 &= 0\ .\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 3\ 2\ 1\ 1\ 3\ \cdots \\
s_5 &= 0\ .\ 4\ 6\ 1\ 8\ 4\ 2\ 1\ 5\ 2\ 1\ \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Gözlem: $t \neq s_3$ (üçüncü dijit farklı

$$t = 0\ .\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \cdots$$

Gözlem: $t \neq s_i$ (her i için i dijit farkı)

$$t \notin S = \{s_1, s_2, \ldots\} = (0,1)$$

Çelişki!

$$t = 0\ .\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \cdots \in (0,1)$$

İspat sonu

Kanıtladık : $(0,1) \subseteq R$ sayilamazdir.

İspatlanabilir: Sayılabilir kümenin her alt kümesi sayılabilirdir.

Bu durumda, R reel sayılar kümesi sayılamazdır.

Önceki ispat teknikleri;

Cantor diagonelleştirme ispatı

olarak bilinir.

Aynı teknik diğer ispatlar içinde kullanılabilir.

Teorem: Eğer S sonsuz sayılabilir küme ise P(S) güç kümesi sayılamazdır.

İspat:

S sayılabilir olduğu için elemanları listeleyebiliriz

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$$

S'nin elemanları

P(S), güç kümesinin elemanlar formları;

$$\emptyset$$

$$\{s_1\}$$

$$\{s_1, s_3\}$$

$$\{s_1, s_3, s_4\}$$

$$\{s_5, s_7, s_9, s_{10}\}$$

$$\vdots$$

Güç kümesinin her bir elemanını, 0 ve 1'in ikili bir dizisi ile kodlarız.

Güç kümesinin elemanları (keyfi sırada) $P(S)$	İkili kodlama s_1	s_2	s_3	s_4	$\cdots$
$\{s_1\}$	1	0	0	0	$\cdots$
$\{s_2, s_3\}$	0	1	1	0	$\cdots$
$\{s_1, s_3, s_4\}$	1	0	1	1	$\cdots$

Gözlem:
Her sonsuz ikili dize güç setinin bir elemanına karşılık gelir

Örnek: $1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\ \cdots$

Karşılık: $\{s_1, s_4, s_5, s_6, \ldots\} \in P(S)$

P (S) güç kümesinin sayılabilir olduğunu varsayalım (çelişki için).

Sonra: güç kümesinin elemanlarını sıralayabiliriz.

$$P(S) = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$$

Güç kümesinin elemanları $P(S)$	Bu bağlamda İkili kodlama					
t_1	1	0	0	0	0	$\cdots$
t_2	1	1	0	0	0	$\cdots$
t_3	1	1	0	1	0	$\cdots$
t_4	1	1	0	0	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$					

Bit'ler köşegenlerin tamamlayıcısı olan ikili dize alın.

t_1	1	0	0	0	0	$\cdots$
t_2	1	1	0	0	0	$\cdots$
t_3	1	1	0	1	0	$\cdots$
t_4	1	1	0	0	1	$\cdots$
Köşegenlerin tümleyeni	0	0	1	1		$\cdots$

İkili dize: $t = 0011 \cdots$

İkili dize: $t = 0011 \quad \cdots$

P(S) Güç kümesinin bir elemanına karşılık gelir : $t = \{s_3, s_4, \ldots\} \in P(S)$

Böylece t, bazı t_i değerlerine eşittir: $t = t_i$

$$t \in P(S)$$

Ne var ki:

t ikili dizesindeki i-inci bit t_i'nin i-inci bitinden farklıdır, böylece: $t \neq t_i$

$$t \notin P(S) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

Çelişki!!!

İspatın sonu