Sayma

CSC-2259 Ayrık Yapılar

Temel sayım ilkeleri

Çarpım kuralı:

Prosedürün iki görevden oluştuğunu varsayalım

n_1 1. görev gerçekleştirmenin yolları

n_2 2. görev gerçekleştirmenin yolları

$\Downarrow$

$n_1 \cdot n_2$ Prosedürü gerçekleştirmenin yolları

Örnek: 2 çalışan 10 büro

Çalışanları ofislere aseçmek için kaç yol vardır?

1'inci çalışan 10 büro seçebilir

2'nci çalışan 9 büro seçebilir

Toplam büro seçme yolları : 10x9 = 90

Örnek: 2 sembol ile kaç farklı değişken ismi yazılabilir?

XY (A1, A2, AA gibi)

1'inci sembol harf
26 seçim

2'inci sembol harf ve rakam
26+10 = 36 seçim

Toplam değişken ismi seçimi: 26x36 = 936

Genelleştirilmiş Çarpım Kuralı:

k görevden oluşan bir prosedür varsayalım

n_1 1. Görevi gerçekleştirme yolları

n_2 2. Görevi gerçekleştirme yolları

$\vdots$

n_k k. Görevi gerçekleştirme yolları

$\Downarrow$

$n_1 n_2 \cdots n_k$ Prosedürü gerçekleştirmenin yolları

Örnek: $k \geq 1$ sembollü kaç farklı değişken adı verilebilir?

$XY_1 \cdots Y_{k-1}$ (D1B…6 gibi)

1'nci sembol harker
26 seçim

Kalan semboller harf ve rakamlar
Her biri için 36 seçim

Toplam seçim: $26 \cdot \underbrace{36 \cdots 36}_{k-1} = 26 \cdot (36)^{k-1}$

Toplam Kuralı:

Bir işlemin iki farklı yöntemden biri ile gerçekleştirilebildiğini varsayalım

n_1 1. yöntem gerçekleştirmenin yolları

n_2 2. yöntem gerçekleştirmenin yolları

$\Downarrow$

$n_1 + n_2$ İşlemi gerçekleştirmenin yolları

Örnek: 1 veya 2 iki semboller ile isimlendirilen değişkenlerin sayısı

1 sembollü değişkenler: 26

2 sembollü değişkenler: 936

Değişkenlerin toplam sayısı: 26+936=962

Toplama-Çıkarma Prensibi (Kombinatorik)

Bir işlemin iki farklı yöntemden herhangi biriyle gerçekleştirilebildiğini varsayalım.

n_1 1. yöntem gerçekleştirmenin yolları

n_2 2. yöntem gerçekleştirmenin yolları

c Her iki yöntemdeki ortak yollar

$n_1 + n_2 - c$ İşlemi gerçekleştirmenin yolları

Örnek:

Ya 1 ile başlayan yada 0 ile biten 8 bit uzunluklu ikili katarın sayısı

1 ile başlayan katar: $1x_1x_2 \cdots x_7$ 128 seçim

0 ile bitten katar: $y_1y_2 \cdots y_7 0$ 128 seçim

Ortak katar: $1z_2 \cdots z_7 0$ 64 seçim

Toplam katar: 128+128-64=192

Güvercin Yuvası Prensibi

3 güvercin

güvercin yuvası

Konstantin Busch - LSU 11

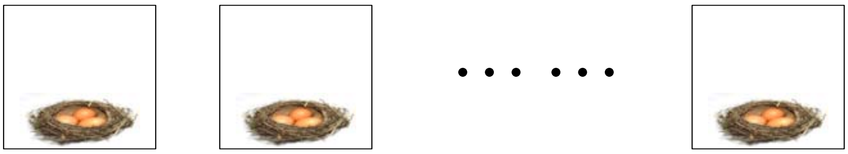
Bir güvercin yuvasında 2 güvercin bulundurur.

3 gücercin

2 güvercin yuvası

Konstantin Busch - LSU 12

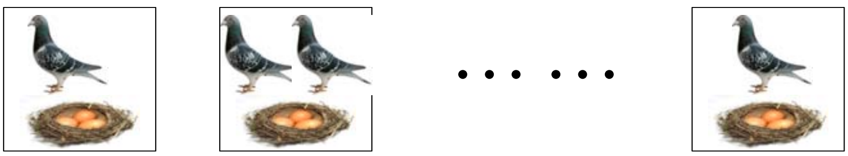
k+1 güvercin



k güvercin yuvası

En az bir güvercin yuvasında iki güvercin vardır

k+1 güvercin



k güvercin yuvası

Güvercin yuvası prensibi:

Eğer k+1 nesne k kutuya yerleştirilirse,
En az bir kutu 2 nesne içerir.

Örnek:

- 367 kişi arasında en az 2 doğum günü var (366 farklı doğum günleri).
- 27 İngilizce kelime arasında en az 2 aynı harfle başlayın (26 farklı harf).

Genelleştirilmiş Güvercin Yuvası Prensibi:

Eğer N tane nesne k kutusu içine kerleştirilirse
En az bir kutu $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ nesne içerir.

İspat:

Eğer her kutu $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ den az nesne içerirse;

$$\#\text{nesneler} \leq k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

çelişki

İspat sonu

Örnek:

100 kişi arasında en az $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ aynı ay da doğuma sahip olan kişiler

$N = 100$ kişi (nesneler)

$k = 12$ aylar (kutular)

Örnek:

En az altı öğrencinin aynı nota sahip olması için kaç öğrenciye ihtiyacımız var? (A,B,C,D,F)

$N = ?$ öğrenciler (nesneler)

$k = 5$ derece (kutular)

$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq 6$ En az 6 öğrenci aynı nota sahip olmalı

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq r$$ ile en küçük N tam sayısı

$$\frac{N}{k} > r-1$$ ile en küçük tam sayı

$$\frac{N}{k} > r-1 \Rightarrow N > k(r-1) \Rightarrow N = k(r-1)+1$$

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq r \Rightarrow N = k(r-1)+1$$

Örneğimiz için:

$$k = 5, \quad r = 6 \Rightarrow N = 5(6-1)+1 = 26$$ öğrenciler

En az 26 öğrenciye ihtiyacımız vardır.

Zarif bir örnek:

n^2+1 rakalmlarının her hangi bir dizisinde, $n+1$ uzunluğunda sıralanmış bir alt dizin vardır.

(artan veya azalan)

$n=3$

$n+1=4$

$n^2+1=10$ sayilar

Artan dizi 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

Azalan dizi 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

Teorem:

n^2+1 rakalmlarının her hangi bir dizisinde, $n+1$ uzunluğunda sıralanmış bir alt dizin vardır. (artan veya azalan)

İspat: Dizi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$

(x_i, y_i)

x_i: a_i dan başlayan en uzun artan dizinin uzunluğu

y_i: a_i dan başlayan en uzun azalan dizinin uzunluğu

Örnek olarak: $(x_1, y_1) = (3,3)$

$a_1 = 8$ den başlayan en uzun artan dizi

8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

$x_1 = 3$

$a_1 = 8$ den başlayan en uzun azalan dizi

8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

$y_1 = 3$

Örnek olarak: $(x_2, y_2) = (2,4)$

$a_2 = 11$ den başlayan en uzun artan dizi

8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

$x_2 = 2$

$a_2 = 11$den başlayan en uzun azalan dizi

8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

$y_2 = 4$

$x_i \geq n+1$ veya $y_i \geq n+1$
ile (x_i, y_i) olduğunu kanıtlamak istiyoruz:

(x_i, y_i)
N'nin her durumu için varsayınız (çelişki için):

$1 \leq x_i \leq n$ ve $1 \leq y_i \leq n$

$1 \leq x_i \leq n$ ve $1 \leq y_i \leq n$ ile tek form (x_i, y_i)
sayı çiftlerinin sayısı:

(x_i, y_i)

n seçim n seçim

$n \cdot n = n^2$ Sayı çiftleri

Bziizm örnek için;:

$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), \ldots, (n,n)$

$n \cdot n = n^2$ unique pairs of form (x_i, y_i)

Since $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$ has n^2+1 elements there are exactly n^2+1 pairs of form (x_i, y_i)

From pigeonhole principle, there are two equal pairs $(x_j, y_j) = (x_k, y_k), \quad j < k$

$$x_j = x_k \text{ and } y_j = y_k$$

$a_j \le a_k$ durumu için:

$$(x_j, y_j) = (x_k, y_k), \quad j < k \quad \Rightarrow \quad x_j = x_k$$

x_k Elemanlarıyla artan dizi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \underbrace{a_j, \ldots, \overbrace{a_k, \ldots, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{x_k}}}, \ldots}, a_{n^2+1}$$

$x_k + 1 = x_j + 1 > x_j$ Elemanlarıyla artan dizi

Çelişki; a_j, x_j uzunluğundan en uzun artan dizi olduğu için

Durum $a_j > a_k$:

$$(x_j, y_j) = (x_k, y_k), \quad j < k \quad \Longrightarrow \quad y_j = y_k$$

y_k Elemanlarıyla azalan dizi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \underbrace{a_j, \ldots, \overbrace{a_k, \ldots, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{y_k}}}}, \ldots, a_{n^2+1}$$

$y_k + 1 = y_j + 1 > y_j$ Elemanlarıyla azalan dizi

Çelişki; a_j , y_j uzunluğundan en uzun azalan dizi için

Bu nedenle, her $(x_i, y_i) : 1 \leq x_i \leq n$ ve $1 \leq y_i \leq n$ için varsayımlar doğru değildir.

Bu nedenle, $x_i \geq n+1$ veya $y_i \geq n+1$ ile (x_i, y_i) dir.

İspat sonu

Permütasyonlar

Permütasyon: Nesnelerin sıralı düzenlenmesi

Örnek: Nesneler: a,b,c

Permütasyonlar: a,b,c a,c,b
b,a,c b,c,a
c,a,b c,b,a

r-permütasyon: r nesnenin sıralı düzenlenmesi

Örnek: Nesneler: a,b,c,d

2-permütasyonlar: a,b a,c a,d
b,a b,c b,d
c,a c,b c,d
d,a d,b d,c

5 öğrenciyi sıraya koymak için kaç yol var?

Sıradaki 1inci yer: 5 öğrenci şeçer

Sıradaki 2inci yer: 4 öğrenci şeçer

Sıradaki 3inci yer: 3 öğrenci şeçer

Sıradaki 4inci yer: 2 öğrenci şeçer

Sıradaki 5inci yer: 1 öğrenci şeçer

Toplam permütasyon: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

5 öğrenciden oluşan grupta, 3 öğrenciyi sıralamanın kaç yolu vardır?

Sıradaki 1inci yer: 5 öğrenci seiçimi

Sıradaki 2inci yer : 4 öğrenci seiçimi

Sıradaki 3üncü yer : 3 öğrenci seiçimi

Toplam 3-permütasyon: $5 \times 4 \times 3 = 60$

n nesne göz önüne alındığında,
r permütasyon sayısı gösterilir.

$$P(n,r)$$

Örnekler:

$$P(5,5)=120$$
$$P(5,3)=60$$
$$P(4,2)=12$$
$$P(3,3)=6$$

Teorem: $$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad 0 \le r \le n$$

İspat:

$$P(n,r)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-(r-1))$$

1st position object choices

2nd position object choices

3rd position object choices

rth position object choices

$$P(n,r) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-(r-1))$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-(r-1))\cdot(n-r)\cdot(n-(r+1))\cdots 2\cdot 1}{(n-r)\cdot(n-(r+1))\cdots 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

Aynı çarpanla çarp ve böl

İspatın sonu

Örnek: 8 sporcudan altın, gümüş ve bronz madalya kazananlara kaç farklı yol var?

$$P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$$

Kombinasyonlar

r-kombinasyonlar:

r nesnelerinin sırasız düzenlenmesi

Örnekler: Nesneler: a,b,c,d

2-kombinasyonlar: a,b a,c a,d b,c b,d c,d

3- kombinasyonlar: a,b,c a,b,d a,c,d b,c,d

n nesneler göz önüne alındığında,
r kombinasyonlarının sayısı
gösterilir.

$$C(n,r) \quad \text{veya} \quad \binom{n}{r}$$

Binom katsayısı olarak da bilinir.

Örnekler:

$$C(4,2) = 6$$

$$C(4,3) = 4$$

Kombinasyonlar, permütasyon bulmak için kullanılabilir

3-kombinasyonlar $C(4,3)$

a,b,c	a,b,d	a,c,d	b,c,d

Nesneler: a,b,c,d

Kombinasyonlar, permütasyon bulmak için kullanılabilir.

3-kombinasyonlar $C(4,3)$

3-permitasyonlar $P(3,3)$

a,b,c	a,b,d	a,c,d	b,c,d
a,c,b	a,d,b	a,d,c	b,d,c
b,a,c	b,a,d	c,a,d	c,b,d
b,c,a	b,d,a	c,d,a	c,d,b
c,a,b	d,a,b	d,a,c	d,b,c
c,b,a	d,b,a	d,c,a	d,c,b

Nesneler: a,b,c,d

Kombinasyonlar, permütasyon bulmak için kullanılabilir.

Toplam permitasyonolar: $P(4,3) = C(4,3) \cdot P(3,3)$

3-kombinasyonlar $C(4,3)$

3-permitasyonlar $P(3,3)$

a,b,c	a,b,d	a,c,d	b,c,d
a,c,b	a,d,b	a,d,c	b,d,c
b,a,c	b,a,d	c,a,d	c,b,d
b,c,a	b,d,a	c,d,a	c,d,b
c,a,b	d,a,b	d,a,c	d,b,c
c,b,a	d,b,a	d,c,a	d,c,b

Nesneler: a,b,c,d

Teorem: $$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad 0 \le r \le n$$

İspat: $$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r)$$

$$\Downarrow$$

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{r!}{(r-r)!}} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

İspat sonu

Örnek:

52 karttan 5 kart seçmenin farklı yolları

$$C(52,5) = \frac{52!}{5!(47)!} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 26\cdot 17\cdot 10\cdot 49\cdot 12 = 2{,}598{,}960$$

Gözlem: $C(n,r) = C(n,n-r)$

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} = C(n,n-r)$$

Örnek: $C(52,5) = C(52,47)$

Binomial Katsayılar

$$C(n,r)=\binom{n}{r}$$

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\ &= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy\\ &= \mathrm{x}^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{2}xy^2+\binom{3}{3}y^3$$

Possible ways to obtain product of 3 terms of x and 0 terms of y

Possible ways to obtain product of 2 terms of x and 1 terms of y

Possible ways to obtain product of 0 terms of x and 3 terms of y

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n \text{ times}}$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Possible ways to obtain product of n terms of x and 0 terms of y

Possible ways to obtain product of $n-1$ terms of x and 1 terms of y

Possible ways to obtain product of 0 terms of x and n terms of y

Gözlem: $$2^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}1^{n-j}1^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$$

Gözlem: $$3^n = \sum_{j=0}^{n} 2^j \binom{n}{j}$$

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} 2^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j$$

Gözlem: $$0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$$

$$0 = 0^n = (1+(-1))^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j$$

$$0=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}$$

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdots$$

çift tek

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

Pascal's Benzerlik: $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$

$$n\geq k>0$$

İspat: $n+1$ elemanlı T kümesi

$a\in T$ T 'nin elemanları

k büyüklüğündeki T'nin alt kümelerinin sayıları

$$\binom{n+1}{k} = |X| + |Y|$$

a 'yı içeren alt kümeler

a 'yı içermeyen alt kümeler

X : a içeren k büyüklükteki T 'nin alt kümeleri

Her bir $s \in X$ formundadır:

$$s = \{a, \underbrace{t_1, \ldots, t_{k-1}}_{T-\{a\} \text{ den } k-1 \text{ eleman}}\}$$

$s \in X$ oluşturnak için toplam yol:

$$|X| = \binom{|T-\{a\}|}{k-1} = \binom{n}{k-1}$$

Y : a içermeyen k büyüklükteki T 'nin alt kümeleri

Her bir $s \in Y$ formundadır:

$$s = \underbrace{\{t_1, \ldots, t_k\}}$$

$T - \{a\}$ den $k-1$ eleman

$s \in Y$ oluşturnak için toplam yol:

$$|Y| = \binom{|T - \{a\}|}{k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = |X| + |Y| = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

İspat sonu

Pascal Üçgeni

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$$

$$15 = 10 + 5$$

Genelleştirilmiş Permütasyonlar ve Kombinasyonlar

Tekrarlayan Permütasyonlar: a, b, c

aaa aab aba abb aac aca acc abc acb
bbb bba bab baa bbc bcb bcc bac bca
ccc cca cac caa ccb cbc cbb cab cba

Her bir sembol seçmek için 3 farklı yol vardır

Tekrarlamalı toplam permütasyonlar:3x3x3 = 27

Tekrarlı Permütasyonlar:

\# n nesne topluluğundan seçilen satırdaki r nesnelerinde düzenleme yolları:

$$n^r$$

Example: Karakter katar uzunluğu $r = 5$
İngiliz alfabe harf sayısı: $n^r = 26^5$

aaaaa, aaaab, aaaba, aaabb, aabab,...

Tekrarlı kombinasyonlar: a,b,c

aaa	aab	~~aba~~	abb	aac	~~aca~~	acc	abc	~~acb~~
bbb	~~bba~~	~~bab~~	~~baa~~	bbc	~~bcb~~	bcc	~~bac~~	~~bca~~
ccc	~~cca~~	~~cac~~	~~caa~~	~~ccb~~	~~cbc~~	~~cbb~~	~~cab~~	~~cba~~

Gereksiz permütasyonları kaldırdıktan sonra

aaa	aab	abb	aac	acc	abc
bbb	bbc	bcc			
ccc					

Tekrarlamalı toplam kombinasyonlar: 10

Tekrarlamalı kombinasyonlar için kodlama:

a | b | c

* * *

1inci harf seçimi   2 inci harf seçimi   3 inci harf seçimi

abc = a|b|c = *|*|*

acc = a||cc = *||**

aab = aa|b|= **|*|

bcc =|b|cc = |*|**

a, b, c nesneleri için tekrarlı tüm olası kombinasyonlar:

aaa: ***||
aab: **|*|
aac: **||*
abb: *|**|
abc: *|*|*
acc: *||**
bbb: |***|
bbc: |**|*
bcc: |*|**
ccc: ||***

*** ve || düzenlemesinin olası tüm yollarını bulmaya eşdeğerdir.

*** ve || düzenlemesinin olası tüm yolları:

5 taneden 3 nesneyi seçmek için mümkün olan tüm yolları denklersek:

5 total positions in a string

3 positions are dedicated for *

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

2-Tekrarla yapılan kombinasyonlar: a, b, c

aa ab ac bb bc cc

Toplam = 6

Her bir kombinasyon ** ve || ile kodlanabilir:

ab = a|b| = *|*|

ac = a||c = *||*

a, b, c nesneleri için tekrarlı tüm olası 2 kombinasyonlar:

aa: **||
ab: *|*|
ac: *||*
bb: |**|
bc: |*|*
cc: ||**

*** ve || düzenlemesinin olası tüm yollarını bulmaya eşdeğerdir.

*** ve || düzenlemesinin olası tüm yolları:

4 taneden 2 nesneyi seçmek için mümkün olan tüm yolları denklersek:

4 total positions in a string

2 positions are dedicated for *

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

4-Tekrarla yapılan kombinasyonlar: a, b, c

aaaa aaab aaac
aabb aabc aacc
abbb abbc abcc accc
bbbb bbbc bbcc bccc cccc

Toplam = 15

Each combination can be encoded with **** and || :

aabb = aa|bb| = **|**|

abcc = a|b|cc = *|*|**

All possible ways to arrange **** and || :

equivalent to all possible ways to select 4 objects out of 6:

6 total positions in a string
4 positions are dedicated for *

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

r-combinations with repetition:

Number of ways to select r objects out of n:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Proof:

Each of the r objects corresponds to a *

The original n objects create $n-1$ of |

The | separate the n original objects

obj 1|obj 2|obj 3|…|obj(n-1)|obj n

$n-1$

The * represent the r selected objects

*|***|*||*|…|*

1st selected object

2nd selected object

rth selected object

Each r-combination can be encoded with a unique string formed with $\underbrace{**\ldots*}_{r}$ and $\underbrace{||\ldots|}_{n-1}$:

$$\underbrace{*|***|*||*|\ldots|*}$$

String length: $r+(n-1)$

Example 3-combinations of 5 objects a,b,c,d,e:

abc = a|b|c|| = *|*|*||

cde = ||c|d|e = ||*|*|*

All possible strings made of $\underbrace{**\ldots*}_{r}$ and $\underbrace{||\ldots|}_{n-1}$:

Equivalent to all possible ways to select r objects out of $r+(n-1)$:

$r+(n-1)$ total positions in a string

r positions are dedicated for *

$$\binom{r+(n-1)}{r}=\binom{n+r-1}{r}$$

End of Proof

Örnek:

How many ways to select r=6 cookies from a collection of n=4 different kinds of cookies?

Equivalent to combinations with repetition:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$$

Örnek:

Eşitliğin kaç tane tamsayı çözümü var?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$6+1+4=11 \qquad x_1 = 6,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4$$

$$0+3+8=11 \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 8,\ x_3 = 4$$

$$4+2+5=11$$

$$\underbrace{1_{x_1}+1_{x_1}+1_{x_1}+1_{x_1}}_{x_1=4}+\underbrace{1_{x_2}+1_{x_2}}_{x_2=2}+\underbrace{1_{x_3}+1_{x_3}+1_{x_3}+1_{x_3}+1_{x_3}}_{x_3=5}=11$$

Equivalent to selecting **r=11** items (ones) from **n=3** kinds (variables)

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{3+11-1}{11}=\binom{13}{11}=\frac{13\cdot 12}{1\cdot 2}=78$$

Ayırılmayan nesnelerin permütasyonları

SUCCESS

Katardaki harfleri yeniden sıralayarak kaç farklı katar yapılabilir?

SUSCCES, USCSECS, CESUSSC,...

SUCCESS	SUCCESS	SUCCESS	SUCCESS
$\binom{7}{3}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{1}{1}$
available positions for 3 S	available positions for 2 C	available positions for 1 U	available positions for 1 E

Total possible strings:

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot\frac{1!}{1!\cdot 0!} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 420$$

Ayrılmayan nesnelerin permütasyonları:

n_1 indistinguishable objects of type 1

n_2 indistinguishable objects of type 2

$\vdots$

n_k indistinguishable objects of type k

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Total permutations for the n objects:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

İspat:

$X_1 X_2 \cdots X_n$	$X_1 X_2 \cdots X_n$		$X_1 X_2 \cdots X_n$
$\binom{n}{n_1}$	$\binom{n-n_1}{n_2}$	$\cdots$	$\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$
Available positions for n_1 objects of type 1	Available positions for n_2 objects of type 2		Available positions for n_k objects of type k

Total possible permutations:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdots \frac{\cancel{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}}{n_k!\cancel{(n-n_1-\cdots-n_k)!}}$$

$$(n-n_1-n_2-\cdots-n_k=0)$$

$$= \frac{n!}{n_1!} \cdot \frac{1}{n_2!} \cdots \frac{1}{n_k!}$$

End of Proof

Kutulara nesnelerin dağıtımı

5 nesnenin dağıtımı: a, b, c, d, e

3 kutuya dağıtım:

Kutu1: 2 nesne var
Kutu2: 1 nesne var
Kutu3: 2nesne var

Kaç farklı yolla nesneleri kutulara dağıtılır?
(Kutunun içindeki yer önemi yok)

Kutu 1	Kutu 2	Kutu 3
a e	b	c d

Problem, tüm permütasyonları ayırt edilemez nesnelerle bulmaya eşdeğerdir.

$n = 5$ sıralamalı pozisyonlar: a b c d e

a b c d e	a b c d e	a b c d e
$n_1 = 2$	$n_2 = 1$	$n_3 = 2$
Kutu 1 için pozisyonlar	Kutu 2 için pozisyonlar	Kutu 3 için pozisyonlar
a e	b	c d

Kutu içindeki nesnelerin tolam düzelenmesi:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} = \frac{5!}{2!\,1!\,2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 30$$

Ayırılmayan nesnelerin permütasyonları ile aynı

Genel olarak:

n Ayırt edilebilen nesneler

k Ayırt edilebilen kutular:

Box1: holds n_1 objects
Box2: holds n_2 objects
...
Boxk: holds n_k objects

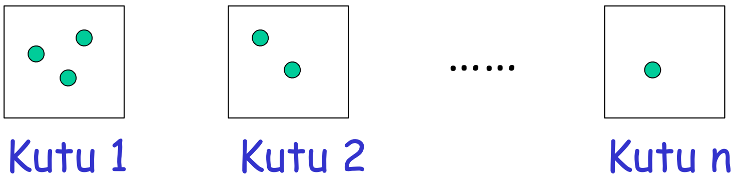
$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Toplam düzenleme: $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Ayrılmayan nesneleri ayırt edilebilen kutulara dağıtma

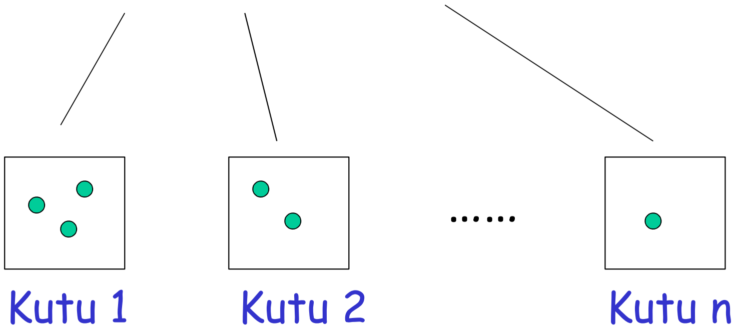
r Ayırt edilemeyen nesneler

n Ayırt edilen kutular:



Problem, denklemin çözüm sayısını bulmakla benzer:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$



$x_i \geq 0 : i$ kutudaki nesnelerin sayısı

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r \qquad x_i \geq 0$$

Çözümlerin toplam sayısı:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Ayırılmayan nesneleri kutulara dağıtmanın yollarının sayısına eşitmidir?