Önermeler

Ders 1

1-1

Önermeler

Konular

1-2

Önerme Mantığı ve İspatlar

- Mantık önermelerin doğruluğunu kanıtlamak için kullanılır.
- Önermenin ne olduğu ile ilgilenmek yerine bazı kurallar koyar ve böylece önermenin genel formunun geçerli olup olmadığını yargılar.
- Mantığın bize sağladığı kurallar, belirtilen aşamalardan çıkan sonucun tutarlı olup olmadığını veya sonucun doğruluğunun ispatlanması aşamasındaki basamaklarda hatalı bir kısmın bulunup bulunmadığını değerlendirmemizi sağlar.

Tanım

önerme: bir dilde yapılan bildirim

- ara değeri dışlama kuralı:
  bir önerme kısmen doğru ya da kısmen yanlış olamaz
- çelişki kuralı:
  bir önerme hem doğru hem yanlış olamaz

1-3

Önerme Örnekleri

Örnek (önerme)

- Ay dünyanın çevresinde döner.
- Filler uçabilir.
- $3 + 8 = 11$

Örnek (önerme değil)

- Saat kaç?
- Ali topu at!
- $x < 43$

1-4

Önerme Değişkeni

Tanım

önerme değişkeni: önermeyi simgeleyen isim

- *Doğru* (D) ya da *Yanlış* (Y) değerini alır
- çoğunlukla küçük harfle gösterilir

Örnek

- p_1: Ay dünyanın çevresinde döner.
- p_2: Filler uçabilir.
- p_3: $3 + 8 = 11$

Örnek

- p_1 ile p_3 *Doğru*
- p_2 *Yanlış*

Birleşik Önerme

- yalın önermelerin bağlaçlar ile bağlanmasıyla birleşik önermeler elde edilir
  - değil
  - ve, veya
  - koşullu bağlaç, karşılıklı koşullu bağlaç
- doğruluk tablosu:
  önerme değişkenlerinin olası bütün değerleri için bağlaç sonucunu veren çizelge

Değil Bağlacı

Tablo: $\neg p$

p	$\neg p$
D	Y
Y	D

Örnek

- $\neg p_1$: Ay dünyanın çevresinde dönmez.
  $\neg D$: *Yanlış*
- $\neg p_2$: Filler uçamaz.
  $\neg Y$: *Doğru*

- "Bütün köpekler vahşidir" önermesinin tersi şunlar olabilir:
  - Bütün köpeklerin vahşi olması söz konusu değildir.
  - Köpeklerin hepsi vahşi değildir.
  - Bazı köpekler vahşi değildir.
- Dikkate edilirse "Hiçbir köpek vahşi değildir" önermesi "Bütün köpekler vahşidir" önermesinin tersi değildir.
- Tersini alma işleminde, ilk ifadenin doğru olduğu her durumda ikinci ifade yanlış olmalı ya da tam tersi olmalıdır.
- "Bütün köpekler vahşidir" önermesi sadece bir köpeğin vahşi olduğu durumda yanlıştır ancak "Hiçbir köpek vahşi değildir" önermesi bu durumda doğru değildir.

Ve Bağlacı

Tablo: $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Örnek

- $p_1 \wedge p_2$: Ay dünyanın çevresinde döner ve filler uçabilir.
  $D \wedge Y$: *Yanlış*

p: Güneş Parlıyor.
q: Köpekler havlar.

$p \wedge q$: Güneş parlıyor ve köpekler havlar.

Veya Bağlacı (Dahili Birleşim)

Tablo: $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Örnek

- $p_1 \vee p_2$: Ay dünyanın çevresinde döner veya filler uçabilir.
  $D \vee Y$: *Doğru*

1-9

Dar Veya Bağlacı (Harici Birleşim)

Tablo: $p \veebar q$

p	q	$p \veebar q$
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Örnek

- $p_1 \veebar p_2$: Ya ay dünyanın çevresinde döner ya da filler uçabilir.
  $D \veebar Y$: *Doğru*

- Örneğin, 'Yarın yüzmeye gideceğim veya golf oynayacağım' cümlesi iki işin birlikte yapılmayacağı anlamı taşıdığından harici tiptedir.
- Diğer taraftan, 'Adaylar 25 yaşın üzerinde veya en az 3 yıllık tecrübeye sahip olmalıdır' cümlesinde *iki şarttan en az birini* sağlayan adaylar dikkate alınacakmış izlenimi verdiğinden dahili birleşimidir.

1-10

Koşullu Bağlaç

Tablo: $p \to q$

p	q	$p \to q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

- p: öncül
- q: sonuç
- okunuşları:
  - p ise q
  - p, q için yeterlidir
  - q, p için gereklidir

p: Kahvaltı yaparım.
q: Öğlen yemeği yemem.
p → q : Eğer kahvaltı yaparsam, öğlen yemeği yemem.

- Yukarıdaki örnekteki p → q için diğer alternatifler:
  - Sadece eğer öğlen yemeği yemezsem kahvaltı yaparım.
  - Kahvaltı yapmam öğlen yemeği yemeyeceğim anlamına gelir.
  - Ne zaman kahvaltı yapsam öğlen yemeği yemem.

- Koşullu önermelerde, p önermesi önceki ve q önermesi sonraki olarak adlandırılır. p önermesi q için **yeterli** şart, q ise p için **gerekli** şarttır.

1-11

Koşullu Bağlaç Örnekleri

Örnek

- p_4: $3 < 8$, p_5: $3 < 14$, p_6: $3 < 2$
- p_7: Güneş dünyanın çevresinde döner.

- $p_4 \to p_5$: 3, 8'den küçükse 3, 14'den küçüktür.
  $D \to D$: *Doğru*
- $p_4 \to p_6$: 3, 8'den küçükse 3, 2'den küçüktür.
  $D \to Y$: *Yanlış*
- $p_2 \to p_1$: Filler uçabilirse ay dünyanın çevresinde döner.
  $Y \to D$: *Doğru*
- $p_2 \to p_7$: Filler uçabilirse güneş dünyanın çevresinde döner.
  $Y \to Y$: *Doğru*

1-12

Koşullu Bağlaç Örnekleri

Örnek

- "70 kg'yi geçersem spor yapacağım."
  - p: 70 kg'den ağırım.
  - q: Spor yapıyorum.
- $p \rightarrow q$ nasıl yorumlanmalı?

Tablo: $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Karşılıklı Koşullu Bağlaç (Çift Yönlü Koşullu önermeler)

Tablo: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

- okunuşları:
  - p yalnız ve ancak q ise
  - p, q için yeterli ve gereklidir
- açılımları:
  - $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - $\neg(p \veebar q)$

p: Kahvaltı yaparım.
q: Öğlen yemeği yemem.

- p ↔ q : Ancak ve ancak (sadece ve sadece) kahvaltı yaparsam öğlen yemeği yemem.
- Alternatif olarak; ancak ve ancak (Sadece ve sadece) öğlen yemeği yemezsem kahvaltı yaparım.

Sağlıklı Formül

Yazım

- birleşik önermeler hangi kurallara göre oluşturulacak?
- kurallara uyan formüller: sağlıklı formül (SF)

Anlam

- *yorum*: yalın önermelere değer vererek birleşik önermenin değerini hesaplama
- doğruluk tablosunda önermenin bütün yorumları yer alır

1-15

Sağlıklı Formül Örnekleri

Örnek (sağlıklı formül değil)

- $\vee p$
- $p \wedge \neg$
- $p \neg \wedge q$

1-16

Öncelik Sırası

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\rightarrow$
5. $\leftrightarrow$

- önceliği değiştirmek için parantez kullanılır

1-17

Öncelik Sırası Örnekleri

Örnek

- s: Ali gezmeye çıkar.
- t: Mehtap var.
- u: Kar yağıyor.
- aşağıdaki SF'ler ne anlama gelir?
  - $t \wedge \neg u \rightarrow s$
  - $t \rightarrow (\neg u \rightarrow s)$
  - $\neg(s \leftrightarrow (u \vee t))$
  - $\neg s \leftrightarrow u \vee t$

1-18

Formül Nitelikleri

- bir SF üç gruptan birine girer:
  1. *geçerli*: bütün yorumlar için doğru (totoloji)
  2. *çelişkili*: bütün yorumlar için yanlış (çelişki)
  3. *tutarlı*: bazı yorumlar için doğru

1-19

Totoloji Örneği

Örnek

Tablo: $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	Y	D

1-20

Çelişki Örneği

Örnek

Tablo: $p \wedge (\neg p \wedge q)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
D	D	Y	Y	Y
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	Y
Y	Y	D	Y	Y

1-21

Üst Dil

Tanım
hedef dil: üzerinde çalışılan dil

Tanım
üstdil: hedef dilin özelliklerinden söz ederken kullanılan dil

Örnek (İngilizce öğrenen biri için)

- hedef dil: İngilizce
- üstdil: Türkçe

Örnek (Intro. to Sci. and Eng. Comp.)

- hedef dil: C
- üstdil: İngilizce

1-22

Mantıksal Gerektirme

Tanım

P doğru olduğunda Q her zaman doğruysa
P formülü Q formülünü **mantıksal gerektirir**: $P \Rightarrow Q$

- $P \rightarrow Q$ totoloji

1-23

Mantıksal Gerektirme Örneği

- $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$

Tablo: $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	Y	D

1-24

Mantıksal Eşdeğerlilik

- İki önerme, kendilerini oluşturan bileşenlerinin tüm doğruluk değeri kümesi için aynı doğruluk değerin sahipse bu iki önerme **mantıksal eşdeğer**dir denir.
- P ve Q 'ya iki bileşik önerme dersek, P ve Q mantıksal eşdeğerse P ≡ Q veya P ⇔ Q şeklinde gösterilir.
- Totolojiler ve çelişkilerde olduğu gibi mantıksal eşdeğerlilik de P ve Q' nun yapılarının sonucudur.

Tanım
P ve Q formüllerinin doğruluk tabloları aynıysa
P ve Q mantıksal eşdeğerli: $P \Leftrightarrow Q$

- $P \leftrightarrow Q$ totoloji

1-25

Mantıksal Eşdeğerlilik Örneği

Örnek

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Tablo: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
D	D	D	Y	D	D
D	Y	Y	Y	Y	D
Y	D	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D

1-26

Mantıksal Anlam

- İki önerme arasında oluşabilecek bir diğer yapıya-bağımlı ilişki de mantıksal anlamdır.
- Eğer bir P önermesi her doğru olduğunda Q önermesi de doğru oluyorsa, P önermesi mantıksal olarak Q önermesi anlamına gelir.
- Ancak bunun tersi doğru değildir yani Q, P yanlış olduğunda da doğru olabilir.
- Mantıksal anlam $\vdash$ ile sembolize edilir.

  P $\vdash$ Q,
- P mantıksal olarak Q anlamına gelir demektir.
- "P $\vdash$ Q" ile "P $\rightarrow$Q bir totolojidir" ifadeleri benzer ifadelerdir.
- P $\vdash$ Q ise P doğru iken Q hiçbir durumda yanlış değildir.
- Bu da sadece P $\rightarrow$Q' nun yanlış olduğu durumda mümkün olduğundan P $\rightarrow$Q bir totoloji olmalıdır.

Mantıksal Anlam Örneği

Örnek: q $\vdash$ ($p \vee q$) olup olmadığını gösteriniz.
Çözüm: q önermesinin her doğru olduğu anda (p V q) nun da doğru olduğunu göstermek gerekir.
Doğruluk tablosunu yaparsak:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- q'nun doğru olduğu her durumda (1 ve 3. satırlar) p V q da doğrudur. p V q, q yanlış olduğunda da doğrudur (2. satır)
- Fakat bunun q, p V q ile mantıksal eşdeğerdir ifadesinin sağlanmasıyla bir alakası yoktur.

Gödel Kuramı

- önermeler mantığı tutarlı ve eksiksizdir
- yüklemler mantığı tutarlı ve eksiksizdir
- matematik tutarlı ama eksiktir

Gödel Kuramı

- matematiğin bütününü ifade edecek bir sistem hem tutarlı hem eksiksiz olamaz!!!

Gödel Kuramı

- Mantıkta her önerme ya yanlış ya da doğrudur.
- Örneğin *A* önermesi "insan bir ağaçtır" yanlıştır; bunun karşıtı anti-*A* ise doğrudur: "İnsan bir ağaç değildir".
- Bu özelliğe dayanarak Gödel, *G* önermesini yaptı: "Öyle bir *A* önermesi bulunabilir ki ne *A*, ne de *A*nın karşıtı (anti-*A*) doğrudur".
- Böylece bomba patlamış oldu: Matematikte daima gösterilemeyen gerçekler olacaktır.
- Modern terimlerle söylersek bir bilgisayara hayal edilebilecek bütün matematik kuralları verilse bile, bilgisayar bazı problemleri asla çözemeyecektir.
- Hilbert, Matematiğin her problemini bir bilgisayar programıyla elde edip çözüme ulaştırabilme inancını taşıyordu. Gödel bunu kendi teoremiyle çürütmüştür.
- 1936'da İngiliz matematikçisi Alan Turing, Gödel'in buluşunu genelleştirdi.
- Turing şunu gösterdi: bir bilgisayar, kanıtlanamayacak bir matematiksel gerçekle karşılaşırsa, sonsuza dek çalışır, durmaz.
- Gödel şunu kanıtladı: "Bir dilin tam tanımı, aynı dilde yapılamaz; çünkü bu yolla bir cümlenin doğruluğu tanımlanamaz".

Önerme Hesabı Yaklaşımları

1. anlamsal yaklaşım: *doğruluk tabloları*
   - değişken sayısı artınca yönetimi zorlaşıyor
2. yazımsal yaklaşım: *akıl yürütme kuralları*
   - önermelerden mantıksal gerektirmeler yoluyla yeni önermeler üretme
3. aksiyomatik yaklaşım: *Boole cebri*
   - eşdeğerli formülleri denklemlerde birbirlerinin yerine koyma

1-31

Eşdeğerlilikler 1

- Aşağıdaki liste bir önceki konudaki teknikler kullanılarak ispatlanabilecek mantıksal eşitlikleri içerir.
- Bu kurallar p, q ve r gibi basit önermeler ve bunların yerine konabilecek yedek örneklerin tamamı için geçerlidir.

1. çifte değilleme: (DN) **Double negation**
   $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
2. değişme: (Com) **Commutativity**
   $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
   $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
3. birleşme: (Ass) **Associativity**
   $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
   $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

1-32

Eşdeğerlilikler 2

4. sabit kuvvetlilik: (Ide) **idempotence**
   $p \wedge p \Leftrightarrow p$
   $p \vee p \Leftrightarrow p$
5. terslik:
   $p \wedge \neg p \Leftrightarrow Y$
   $p \vee \neg p \Leftrightarrow D$
6. etkisizlik: **identity**
   $p \wedge D \Leftrightarrow p$
   $p \vee Y \Leftrightarrow p$
7. baskınlık:
   $p \wedge Y \Leftrightarrow Y$
   $p \vee D \Leftrightarrow D$

1-33

Eşdeğerlilikler 3

8. dağılma: **Distributivity**
   $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. yutma: **absorbtion**
   $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
   $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
10. De Morgan:
    $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
    $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

1-34

Eşlik Kuralı (Duality Principle)

- Sadece $\vee$ ve $\wedge$ bağlayıcılarını içeren herhangi bir *p* önermesi verilmiş ise, bu önermenin eşi
  - $\vee$ yerine $\wedge$,
  - $\wedge$ yerine $\vee$,
  - *t* yerine *f* ve *f* yerine de *t* koyarak elde edilir.
- Örneğin, $(p \wedge q) \vee \sim p$' nin eşi $(p \vee q) \wedge \sim p$ olmalıdır.
- Dikkat edilirse kesişim ve dahili birleşim dışındaki bağlayıcılarla bağlanmış bileşik önermelerin eşinin nasıl elde edildiğinden bahsedilmedi.
- Bunun önemi yoktur çünkü diğer bağlayıcılara sahip önermelerin hepsi sadece tersini alma ve kesişim bağlayıcılarını içeren mantıksal eşdeğer formunda yazılabilir.
- Eşlik kuralına göre eğer iki önerme mantıksal eşdeğerse, eşleri de mantıksal eşdeğerdir.

1-35

Eşdeğerlilik Hesabı Örneği (yerine koyma kuralı)

Örnek: $(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee q) \equiv \sim p$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

$(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (De Morgan Kuralı)

$\equiv \sim p \wedge (q \vee \sim q)$ (Dağılma özelliği)

$\equiv \sim p \wedge t$

$\equiv \sim p$

1-36

Eşdeğerlilik Hesabı Örneği
(yerine koyma kuralı)

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\neg((p \vee q) \wedge r) \vee \neg q) & \\
\Leftrightarrow & \neg\neg((p \vee q) \wedge r) \wedge \neg\neg q & DM \\
\Leftrightarrow & ((p \vee q) \wedge r) \wedge q & DN \\
\Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge (r \wedge q) & Ass \\
\Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge (q \wedge r) & Com \\
\Leftrightarrow & ((p \vee q) \wedge q) \wedge r & Ass \\
\Leftrightarrow & q \wedge r & Abs
\end{array}
$$

1-37

Akıl Yürütme

- doğruluğu varsayılan ya da tanıtlanmış önermeler içeren bir kümeden yola çıkarak bu küme dışındaki bir önermenin doğruluğuna varma

çıkarsama kurallarının gösterilimi

$$
\begin{array}{c}
p_1 \\
p_2 \\
\cdots \\
p_n \\
\hline
\therefore q
\end{array}
\qquad\qquad
p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q
$$

1-38

Akıl Yürütme - örnek

- "Mehmet bir avukattır. Mehmet hukuk fakültesine gitti çünkü tüm avukatlar hukuk fakültesine gider." önermesini göz önüne alalım:
- Bu bir tezdir (argümandır). "Mehmet hukuk fakültesine gitti." sonucunun doğruluğu "Mehmet bir avukattır." ve "tüm avukatlar hukuk fakültesine gider" dayanakları sonucunda elde edildi.
  - p: Mehmet bir avukattır.
  - q: Tüm avukatlar hukuk fakültesine gider.
  - r: Mehmet hukuk fakültesine gitti.
- Buradan;

$$p \wedge q$$
$$\therefore r$$

$\therefore$ Sembolü akıl yürütme sonucunda bir sonuç çıkarıldığını göstermektedir.

Şimdi tezin dayanaklarının doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda sonuç doğru veya yanlış olabilir. Sonuç doğruysa argüman (tez, düşünce) doğru, yanlış ise tez yanlıştır.

Akıl Yürütme - örnek

Bir tezin doğruluğunun araştırılması için

1. Tezin dayanaklarının ve sonucu tanımlanmalıdır.
2. Dayanaklar ve sonuçların doğruluk tabloları inşa edilmelidir.
3. Tüm dayanakların doğru olduğu satırlar bulunmalıdır.
4. 3. aşamadaki her bir satır için sonuç doğruysa tezde doğru, aksi halde tez yanlıştır.

Örnek:

$$p \rightarrow q$$
$$q \rightarrow p$$
$$\therefore p \vee q$$

olduğunu gösteriniz.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$q \vee p$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	D
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	D	Y

Doğruluk tablosu yapacak olursak yandaki tablo elde edilir.

Son satırdan görülebileceği gibi dayanaklar doğru olmasına karşılı sonuç yanlıştır. Sonuç olarak, tez yanlıştır.

Modus Ponens – Doğrulama Metodu

MP

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{\therefore q}$$

p	q	p → r
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Örnek

- Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
- Ali piyangoyu kazandı.
- o halde, Ali araba alacak.

Birinci satır dayanakların doğru olduğunda sonuçta doğru olduğundan tezin geçerli olduğunu göstermektedir

Moden Tollens - Reddetme

MT

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\therefore \neg p}$$

p	q	p → q	~q	~p
D	D	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	D	D

Örnek

- Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
- Ali araba almadı.
- o halde, Ali piyangoyu kazanmadı.

Son satır dayanakların doğru olduğunda sonuçta doğru olduğundan tezin geçerli olduğunu göstermektedir

Yanılgılar - dikkat

sonucu onaylama yanılgısı

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Geçerli değildir!

- $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$ bir totoloji değil:
  $p = Y, q = D$ ise: $(Y \rightarrow D) \wedge D \rightarrow Y$

Örnek

- Madonna A.B.D. başkanıysa 35 yaşının üstündedir.
- Madonna 35 yaşının üstündedir.
- o halde, Madonna A.B.D. başkanıdır.

1-43

Yanılgılar

öncülü yadsıma yanılgısı

Öncülü reddetme yanılgısı

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

Geçerli değildir!

- $(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$ bir totoloji değil:
  $p = Y, q = D$ ise: $(Y \rightarrow D) \wedge D \rightarrow Y$

Örnek

- $2 + 3 = 8$ ise $2 + 4 = 6$
- $2 + 3 \neq 8$
- o halde, $2 + 4 \neq 6$

1-44

Disjunctive Syllogism - Ayırıcı Kıyas

DS

$$\frac{\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \end{array}}{\therefore q}$$

Örnek

- Ali'nin cüzdanı cebinde veya masasında.
- Ali'nin cüzdanı cebinde değil.
- o halde, Ali'nin cüzdanı masasında.

Disjunctive Addition
Ekleme

Add

$$\frac{p}{\therefore p \lor q}$$

p	q	$p \lor q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Conjunctive Simplification Basitleştirme

Sim

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

1-47

Hypothetical Syllogism
Varsayımlı kıyas

Syl

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Örnek

- $396|35244 \rightarrow 66|35244$
- $66|35244 \rightarrow 3|35244$
- o halde, $396|35244 \rightarrow 3|35244$

Örnek (Uzay Yolu)

Spock - Yarbay Decker:

Şu anda düşman gemisine saldırmak intihar olur. İntihara teşebbüs eden biri Atılgan'ın komutanlığını yapmaya psikolojik olarak yetkin degildir. Bu yüzden, sizi görevden almak zorundayım.

Örnek (Uzay Yolu)

- p: Decker düşman gemisine saldırıyor.
- q: Decker intihara teşebbüs ediyor.
- r: Decker Atılgan'a komut etmeye psikolojik olarak yetkin değil.
- s: Spock Decker'ı görevden alıyor.

Varsayımlı kıyas örneği

Örnek

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

1.	$p \rightarrow q$	*Pre*
2.	$q \rightarrow r$	*Pre*
3.	$p \rightarrow r$	1, 2, *Syl*
4.	$r \rightarrow s$	*Pre*
5.	$p \rightarrow s$	3, 4, *Syl*
6.	p	*Pre*
7.	s	5, 6, *MP*

1-49

Constructive Dilemma - Yapıcı ikilem

CD

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

$p \rightarrow q$: Eğer Obama seçimleri kazanırsa başkan olacak.
$r \rightarrow s$: Eğer McCane seçimleri kazanırsa başkan olacak.
$p \vee r$: Obama seçimleri kazanır veya McCane seçimleri kazanır.

$\therefore$ Sonuç olarak ya Obam veya McCane başkan olacak

1-50

Destructive Dilemma -Yıkıcı İkilem

DD

$$\frac{\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ r \longrightarrow s \\ \neg q \vee \neg s \end{array}}{\therefore \neg p \vee \neg r}$$

p → q : Eğer Obama seçimler için yarışırsa başkan olacak.
r → s : Eğer McCane seçimler için yarışırsa başkan olacak.
~r V ~s : Obama başkan olamaz veya McCane başkan olamaz.

∴ Sonuç olarak ne Obam ne de McCane seçimler için yarışamaz.

1-51

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

$$\frac{\begin{array}{c} p \longrightarrow r \\ r \longrightarrow s \\ t \vee \neg s \\ \neg t \vee u \\ \neg u \end{array}}{\therefore \neg p}$$

1.	$p \longrightarrow r$	*Pre*
2.	$r \longrightarrow s$	*Pre*
3.	$p \longrightarrow s$	1, 2, *Syl*
4.	$t \vee \neg s$	*Pre*
5.	$\neg s \vee t$	4, *Com*
6.	$s \longrightarrow t$	5, *Imp*
7.	$p \longrightarrow t$	3, 6, *Syl*
8.	$\neg t \vee u$	*Pre*
9.	$t \longrightarrow u$	8, *Imp*
10.	$p \longrightarrow u$	7, 9, *Syl*
11.	$\neg u$	*Pre*
12.	$\neg p$	10, 11, *MT*

1-52

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

$$\begin{array}{c}(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)\\ r \rightarrow t\\ \neg t\\ \hline \therefore p\end{array}$$

1.	$r \rightarrow t$	*Pre*
2.	$\neg t$	*Pre*
3.	$\neg r$	1, 2, *MT*
4.	$\neg r \vee \neg s$	3, *Add*
5.	$\neg(r \wedge s)$	4, *DM*
6.	$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$	*Pre*
7.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	6, 5, *MT*
8.	$p \wedge q$	7, *DM*
9.	p	8, *Sim*

1-53

Akıl Yürütme Örnekleri

$$\begin{array}{c}p \rightarrow (q \vee r)\\ s \rightarrow \neg r\\ q \rightarrow \neg p\\ p\\ s\\ \hline \therefore q \wedge \neg q\end{array}$$

1.	$q \rightarrow \neg p$	*Pre*
2.	p	*Pre*
3.	$p \rightarrow \neg q$	1
4.	$\neg q$	2, 3, *MP*
5.	s	*Pre*
6.	$s \rightarrow \neg r$	*Pre*
7.	$\neg r$	5, 6, *MP*
8.	$p \rightarrow (q \vee r)$	*Pre*
9.	$q \vee r$	2, 8, *MP*
10.	q	7, 9, *DS*
11.	$q \wedge \neg q$	4, 10

1-54

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

Eğer yağmur yağma olasılığı varsa veya saç bandını bulamazsa, Filiz çimleri biçmez. Hava sıcaklığı 20 derecenin üzerindeyse yağmur yağma olasılığı yoktur. Bugün hava sıcaklığı 22 derece ve Filiz saç bandını takmış. Demek ki Filiz çimleri biçmeye gidiyor.

Örnek

- p: Yağmur yağabilir.
- q: Filiz'in saç bandı kayıp.
- r: Filiz çimleri biçiyor.
- s: Hava sıcaklığı 20 derecenin üzerinde.

1-55

Akıl Yürütme Örnekleri

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow \neg r \\ s \rightarrow \neg p \\ s \wedge \neg q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

1.	$s \wedge \neg q$	*Pre*
2.	s	1, *Sim*
3.	$s \rightarrow \neg p$	*Pre*
4.	$\neg p$	2, 3, *MP*
5.	$\neg q$	1, *Sim*
6.	$\neg p \wedge \neg q$	4, 5
7.	$\neg(p \vee q)$	6, *DM*
8.	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$	*Pre*
9.	?	7, 8

1-56

Yüklem - Açık Önerme

Tanım
yüklem:

- bir ya da birden fazla değişken içeren ve
- bir önerme olmayan ama
- değişkenlere izin verilen seçenekler arasından değer verildiğinde önerme haline gelen

bir bildirim (*açık bildirim*)

1-57

Çalışma Evreni

Tanım
çalışma evreni: $\mathcal{U}$
izin verilen seçenekler kümesi

- örnek çalışma evrenleri:
  - $\mathbb{Z}$: tamsayılar
  - $\mathbb{N}$: doğal sayılar
  - $\mathbb{Z}^+$: pozitif tamsayılar
  - $\mathbb{Q}$: rasyonel sayılar
  - $\mathbb{R}$: reel sayılar
  - $\mathbb{C}$: karmaşık sayılar

1-58

Yüklem - örnekler

Örnek
$\mathcal{U} = \mathbb{N}$
$p(x)$: $x + 2$ bir çift sayıdır

$p(5)$: Y
$p(8)$: D

$\neg p(x)$: $x + 2$ bir çift sayı değildir

Örnek
$\mathcal{U} = \mathbb{N}$
$q(x, y)$: $x + y$ ve $x - 2y$ birer çift sayıdır

$q(11, 3)$: Y, $q(14, 4)$: D

1-59

Niceleyiciler

Tanım
varlık niceleyicisi:
yüklem bazı değerler için doğru/yanlış

- simgesi: $\exists$
- okunuşu: *vardır*

- simge: $\exists!$
- okunuşu: *vardır ve tektir*

En az bir tane vardır.

Tanım
evrensel niceleyici:
yüklem bütün değerler için doğru/yanlış

- simgesi: $\forall$
- okunuşu: *her*

$\forall x \in D$, $P(x)$ önermesi en az bir x değeri için yanlış olduğu gösterilirse bu önerme yanlış olur. Bu x örneğine karşıt örnek adı verilir.

1-60

Niceleyiciler

varlık niceleyicisi

$\mathcal{U} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$\exists x \; p(x) \equiv p(x_1) \vee p(x_2) \vee \cdots \vee p(x_n)$

- *bazı x'ler için p(x) doğru*

evrensel niceleyici

$\mathcal{U} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$\forall x \; p(x) \equiv p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \cdots \wedge p(x_n)$

- *her x için p(x) doğru*

1-61

Niceleyici Örnekler

Örnek

$\mathcal{U} = \mathbb{R}$

- $p(x) : x \geq 0$
- $q(x) : x^2 \geq 0$
- $r(x) : (x-4)(x+1) = 0$
- $s(x) : x^2 - 3 > 0$

şeklinde tanımlandıysa yandaki ifadelerin sonuçları ne olur?

- $\exists x \; [p(x) \wedge r(x)]$
- $\forall x \; [p(x) \rightarrow q(x)]$
- $\forall x \; [q(x) \rightarrow s(x)]$
- $\forall x \; [r(x) \vee s(x)]$
- $\forall x \; [r(x) \rightarrow p(x)]$

1-62

Niceleyicilerin Değillenmesi

- $\forall$ yerine $\exists$, $\exists$ yerine $\forall$ konur
- yüklem değillenir

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x\ p(x) &\equiv \forall x\ \neg p(x)\\
\neg\exists x\ \neg p(x) &\equiv \forall x\ p(x)\\
\neg\forall x\ p(x) &\equiv \exists x\ \neg p(x)\\
\neg\forall x\ \neg p(x) &\equiv \exists x\ p(x)
\end{aligned}
$$

Niceleyicilerin Değillenmesi

Teorem

$\neg\exists x\ p(x) \equiv \forall x\ \neg p(x)$

Tanıt.

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x\ p(x) &= \neg[p(x_1) \vee p(x_2) \vee \cdots \vee p(x_n)]\\
&= \neg p(x_1) \wedge \neg p(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(x_n)\\
&= \forall x\ \neg p(x)
\end{aligned}
$$

Niceleyici Eşdeğerlilik

Teorem

$\exists x\ [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$

Teorem

$\forall x\ [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$

1-65

Niceleyici Gerektirmeleri

Teorem

$\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists x\ p(x)$

Teorem

$\exists x\ [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow \exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$

Teorem

$\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \Rightarrow \forall x\ [p(x) \vee q(x)]$

1-66

Çoklu Niceleyiciler

- $\exists x \exists y\ p(x,y)$, $\exists y \exists x\ p(x,y)$
- $\forall x \exists y\ p(x,y)$, $\forall y \exists x\ p(x,y)$
- $\exists x \forall y\ p(x,y)$, $\exists y \forall x\ p(x,y)$
- $\forall x \forall y\ p(x,y)$, $\forall y \forall x\ p(x,y)$

Çoklu Niceleyici Örnekleri

Örnek
$\mathcal{U} = \mathbb{Z}$
$p(x,y) : x + y = 17$

- $\forall x \exists y\ p(x,y)$:
  her x için öyle bir y bulunabilir ki $x + y = 17$ olur
- $\exists y \forall x\ p(x,y)$:
  öyle bir y bulunabilir ki her x için $x + y = 17$ olur

- $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ olsa?

Çoklu Niceleyici Örnekleri

Örnek

$\mathcal{U}_x = \{1, 2\} \wedge \mathcal{U}_y = \{A, B\}$

$$\begin{aligned}
\exists x \exists y \; p(x, y) &\equiv [p(1, A) \vee p(1, B)] \vee [p(2, A) \vee p(2, B)] \\
\exists x \forall y \; p(x, y) &\equiv [p(1, A) \wedge p(1, B)] \vee [p(2, A) \wedge p(2, B)] \\
\forall x \exists y \; p(x, y) &\equiv [p(1, A) \vee p(1, B)] \wedge [p(2, A) \vee p(2, B)] \\
\forall x \forall y \; p(x, y) &\equiv [p(1, A) \wedge p(1, B)] \wedge [p(2, A) \wedge p(2, B)]
\end{aligned}$$

Sayısal Devre tasarımı

- Bu kısımda sayısal sistemlerin temel parçalarını göz önüne alarak sayısal devre tasarımı mantığı üzerinde duracağız.
- Sayısal sistemlerin amacı; voltaj ve akım gibi fiziksel varlıklar tarafından temsil edilen ayrık bilgileri düzenlemesidir. En küçük temsil birimi binary digit'in kısaltması olan bit olarak isimlendirilir.
- Elektronik anahtarlar; yüksek voltaj ve alçak voltaj gibi iki fiziksel duruma sahip olduğundan, biz yüksek voltajı 1 ve alçak voltajı 0 ile temsil edeceğiz.
- Mantıksal kapı sayısal sistemlerdeki en küçük işlem ünitesidir. Bir veya birkaç bit girdi olarak alınır ve işlenerek bir bit sonuç üretilir.
- Devre, kablolarla birbirine bağlanmış çok sayıdaki mantık devresinden oluşur. Bir grup biti girdi olarak alır ve bir veya daha fazla bit çıktı üretir.

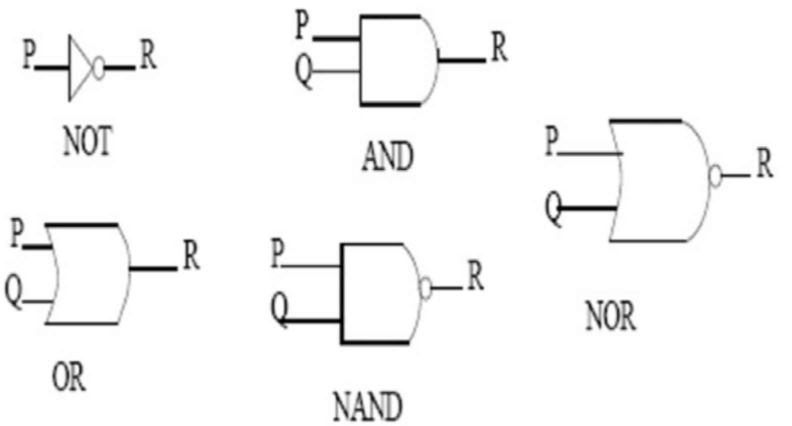
Sayısal Devre tasarımı

- Beş temel mantık kapısı aşağıdaki gibidir:

1. NOT kapısı (inverter) 0 girdini 1'e, 1 girdisinide 0'a dönüştürür. ~p ile gösterilir.
2. AND kapısı: p ve q gibi iki bit alır. p ve q 1 ise çıktı 1 aksi halde çıktı sıfır olur. p ∧q ile gösterilir.
3. OR kapısı: p ve q gibi iki bit alır. p ve q'nun her ikisi de 0 ise çıktı sıfır aksi halde 1 olur. p V q ile gösterilir.
4. NAND kapısı: p ve q gibi iki bit alır. p ve q'nun her ikisi de 1 ise çıktı sıfır aksi halde 1 olur. ~(p ∧ q) ile gösterildiği gibi p|q ile de gösterilir. | Scheffer stroke olarak adlandırılır.
5. NOT kapısı: p ve q dan en az biri 1 ise çıktı 0 aksi halde 1 olur. ~(p V q) ile gösterildiği gibi p↓q ile de gösterilir. ↓ Pierce arrow olarak adlandırılır.

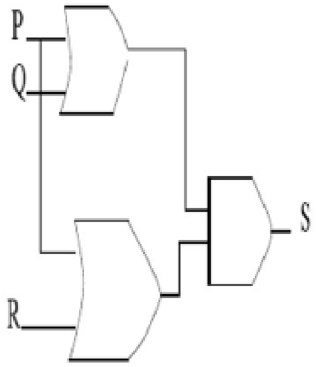
1-71

Semboller



1-72

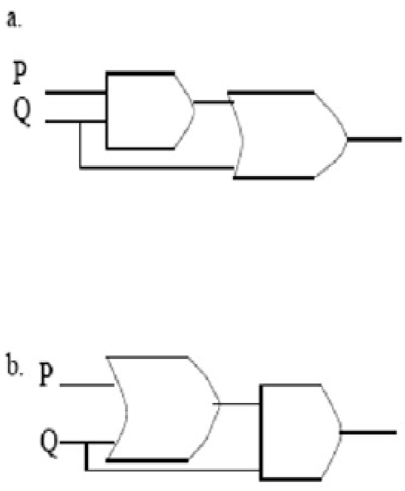
Örnekler



P=0, Q=1 ve R=0 olduğuna göre S deki sinyal çıktısı ne olur.

1-73

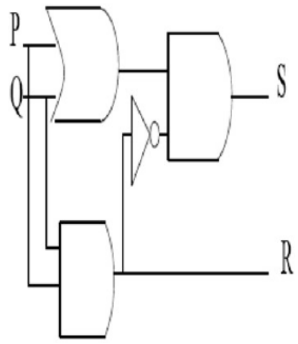
Örnekler



Her iki devrenin eşdeğer olduğunu gösteriniz.

1-74

Örnekler



P ve Q tek binary digit ve P+Q=RS olsun. Aşağıdaki Tabloyu tamamlayın

P	Q	R	S
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Bu devre, half-adder (yarı-toplayıcı) devre olarak adlandırılır ve iki tek binary digitin toplamını hesaplar.