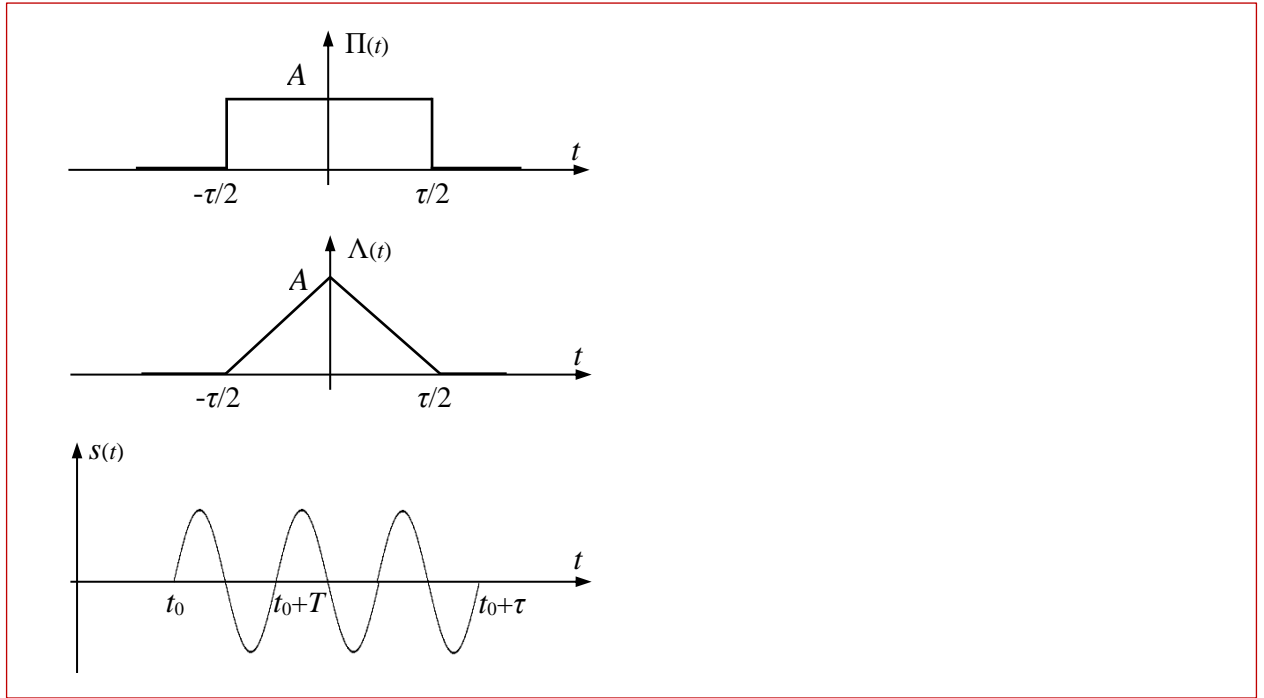


# 1 İşaret, Doğrusallık, Enerji

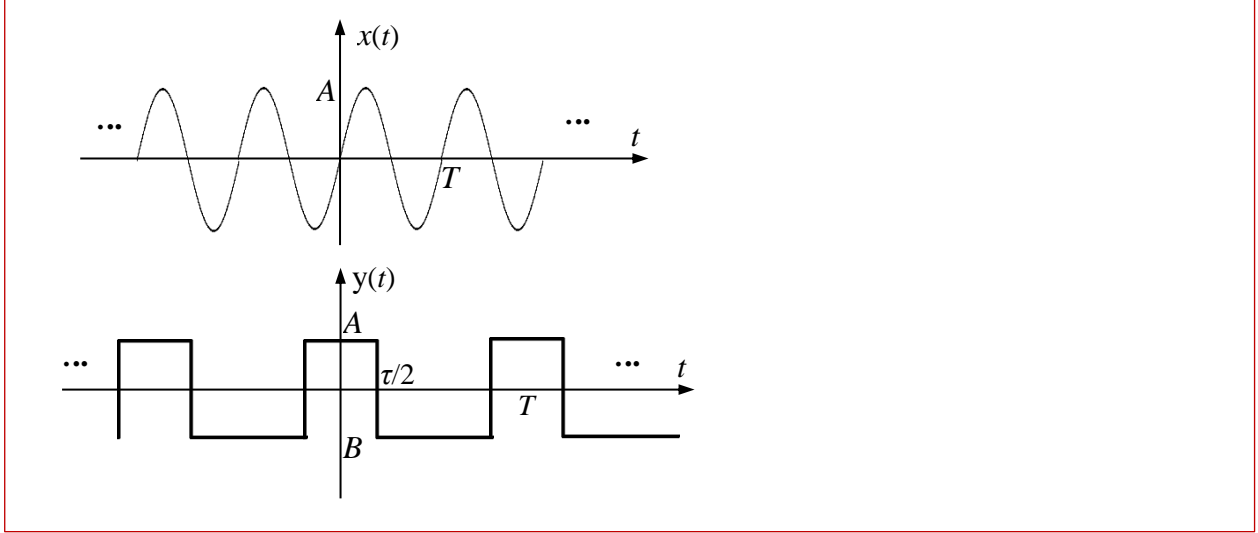
Bir elektriksel büyüklük zamanın sürekli ya da kesikli gerçek ya da karmaşık (complex) fonksiyonu ise buna elektriksel işaret, voltaj işareti ya da kısaca işaret diyoruz. Bazı durumlarda, örneğin birden çok işareti beraberce irdelleyeceğimiz zaman, bu işaret topluluğuna da işaret diyebiliriz. Bazen ayırıcı olması için vektör işaret de denilebilir. İsimlendirmede ortaklık sağlamak amacıyla bazı işaretleri gösterelim (Şekil 1.1) ve biraz karşılaştıralım.



Şekil 1.1. Dikdörtgen, üçgen ve sinüsoidal darbe işaret örnekleri.

$\Pi(t)$  bir dikdörtgen darbe,  $\Lambda(t)$  ise bir üçgen darbe işareti, ya da kısaca üçgen darbedir. Belirli bir sınırlı zaman aralığında sıfırdan farklı değerler alan, geri kalan zamanda sıfır olan işaretleri genellikle darbe olarak nitelendiriyoruz. Ayrıca darbenin şeklini belirtmek için de ön isim getirebiliriz; üçgen,

dikdörtgen, Gaussian, sinüsoidal gibi. Örneğin Şekil 1.1'deki  $s(t)$   $t_0$ 'da başlayan  $\tau$  süresince  $T$  periyotlu sinüs fonksiyonundan oluşan bir sinüsoidal darbe işaretidir. Matematiksel ifadeyle  $s(t) = [u(t - t_0) - u(t - t_0 - \tau)]\sin(2\pi(t - t_0)/T)$  şeklinde yazılabilir. Ancak bağlam içindeyken "sinüsoidal darbe" ismiyle anmak çok daha pratiktir.



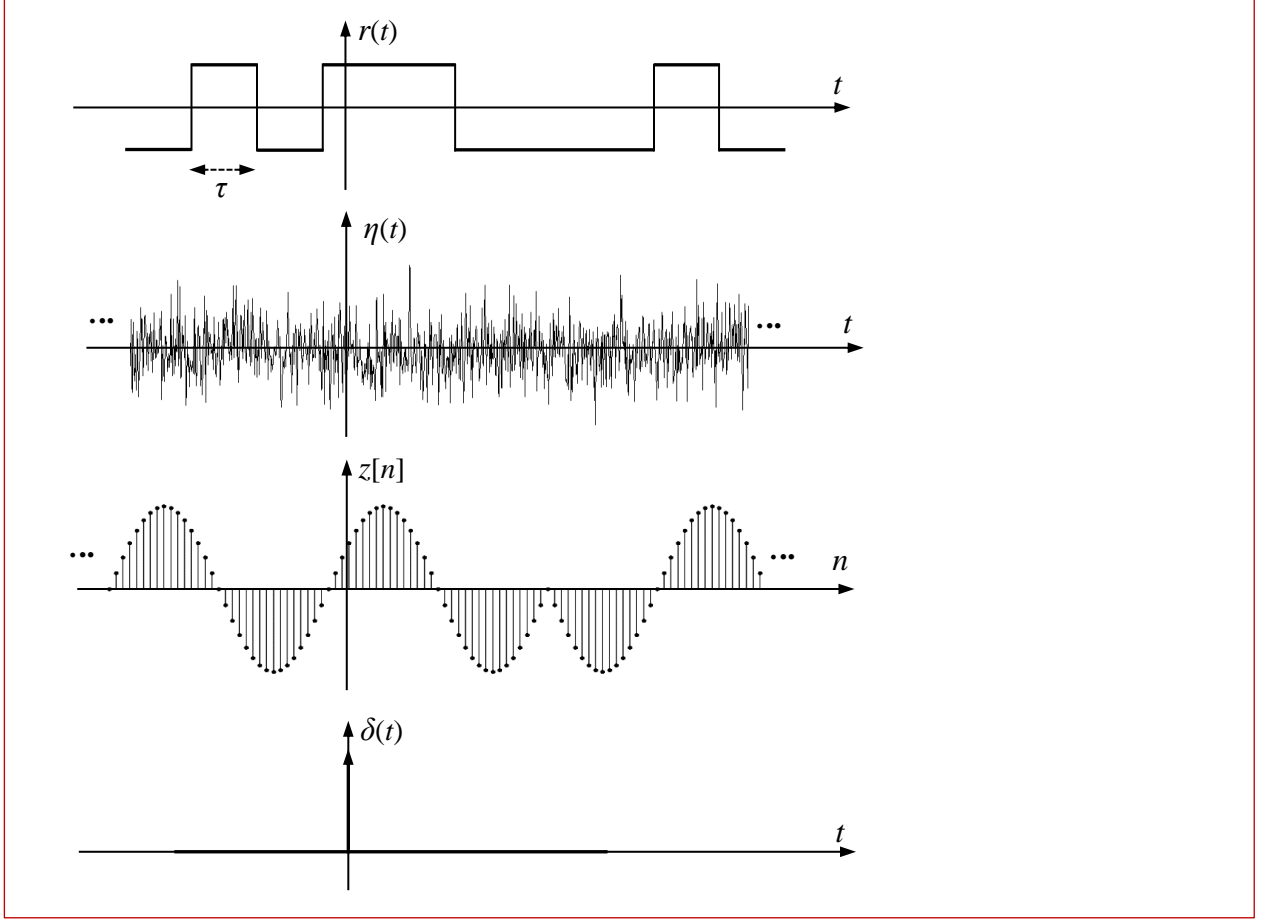
Şekil 1.2. Periyodik işaret örnekleri.

Şekil 1.2'deki  $x(t)$  işaret de sinüsoidaldir ancak  $-\infty$ 'dan  $+\infty$ 'a kadar tekrar etmektedir. Çizimin sağ ve soluna eklediğimiz üç nokta çoğunlukla bunu ifade etmektedir. Tabii ki hiçbir gerçek işaret sonsuz genişlikte bir aralığa sahip olamaz. Ama nanosaniyelerle hesap yaptığımız bir bağlamda birkaç saniye dahi pratik olarak sonsuzluk gibidir, bu kabulde yapılacak hatalar bağlam içinde bazı durumlarda ihmal edilebilir.

$y(t)$  işareti "dikdörtgen dalga" olarak anılır. Gerekli olduğu durumlarda sayısal özellikleri grafik üzerinde gösterilmelidir, matematiksel olarak da ifade edilebilir. Bazen, matematikten hatırladığımız fonksiyon tanımı gereği, dikey çizgileri çizmek istemeyebiliriz. Ancak gerçekte  $A$  değerinden  $B$  değerine sonsuz küçük bir zaman içinde atlayabilen bir fiziksel işaret yoktur, O nedenle dikey çizgileri çizmekte hiçbir sakınca yoktur, çizimin okunaklılığını artırır. "Kare dalga" dediğimiz şey de dikdörtgen darbe treninin iki değerinde harcadığı sürelerin eşit olduğu durumdur. Bazen buna ilave olarak, bu iki değer birbirinin eksi işaretlisi olduğunu da ima edebiliyoruz, ki bu sakıncalı bir imadır. Doğrusu, eğer öyle ise, "ortalama değerinin sıfır olduğu"nu ya da bu iki değer ne olduğunu söylemektir.

Aslında yukarıdaki paragraflar ve şekillerden bir şeyi daha anlamış olduk; Düzgün şekil çizmek ve gerekli olduğunu bildiğimiz değerleri şekil üzerinde göstermek, bir paragraf dolusu anlatımdan hatta bazen matematiksel ifadelerden bile daha anlattıcıdır. O nedenle, haberleşme konusunu çalışan öğrencilerden, her mühendiste olması gerektiği gibi, düzgün, anlamlı, anlattıcı şekiller çizebilmesini bekliyoruz.

Şekil 1.3. Özel işaret örnekleri.



İşaretler periyodik ya da darbe şeklinde olmak zorunda değildir. Şekil 1.3'teki  $\eta(t)$  işaretinin herhangi yapısının olmadığını, rastgele değerlerden oluştuğunu görebiliyoruz. Gerçekten böyle ise, yani her andaki değeri önceki ya da sonraki değerlerden önemli miktarda bağımsız ise, bu işarete gürültü diyoruz. Rastgele değerlerden oluştuğu için  $\eta(t)$ 'yi matematiksel bir şekilde ifade etme imkanı yok. Hatta bazı işaret işleme araştırmacılar  $\eta(t)$  içindeki  $t$ 'nin yazılmasının, sanki zamanın bir fonksiyonu olduğunu ima ettiği için, sakıncalı olduğunu söylemektedir. Ancak, gürültünün bazı karakteristik/istatistik özellikleri gibi değerlerini belirtebiliriz. Ayrıca gürültünün tanımını, haberleşme sistemlerinde asıl veri taşıyan işaretlerin üzerine toplanarak onu bozduğunu hatırlayarak, biraz genişletelim ve "asıl işaretin dışında olup, onun algılanmasını zorlaştırıcı etki gösteren tüm işaretlerin toplamı" şeklinde tanımlayalım. Böylece, kendi içinde bir yapısı da olsa, asıl işaretin üzerine toplandığında onu bozan işaretler de gürültü kapsamına girer. Bu şekildeki işaretlere genellikle karıştırıcı/bozucu işaret (interference) denir ve tanımlanabilir bir yapısı olması dolayısı ile rastgele gürültüden farklıdır ama etkisi itibarıyla gürültü olarak anılabilir. Kalabalık bir salonda, duymak istediğiniz kişinin sesine eklenen diğer konuşmalar gibi. Tahmin edebilirsiniz ki, çok sayıda ve aralarında ilişki olmayan birçok işaret toplandığında önemli miktarda rastgelelik görüntüsü verebilir (aslında rastgele olmasalar dahi). Gürültü konusunu, elektronik haberleşmenin temel ögesi olduğu için, ilerleyen bölümlerde sıkça irdelleyeceğiz.

$r(t)$  işareti dikdörtgen darbelerin toplamından oluşmakta ve darbeler  $\pm A$  değerlerini alabilmektedir. Darbeler  $\tau$  aralıklarıyla başlıyor olmasına rağmen değerleri rastgele olarak  $+A$  ya da  $-A$  olmaktadır. Bu özel işaret haberleşmede sıkça geçmektedir. İkili veri akışını temsil etmektedir. O nedenle ismi ikili veri akış işareti, ya da ikili rastgele dikdörtgen dalga treni olabilir.

$z[t]$  işareti ise sadece belli sonsuz küçük zamanlarda değer alıyor, diğer zamanlarda ise sıfır. Tabii ki böyle bir elektriksel işareti üretmek mümkün değil. Pratikte oldukça küçük zaman aralıklarında değerler üretip  $z[t]$ 'e benzetmek mümkün olsa dahi, çizimdeki amaç teoride olup pratikte olmayan bir işareti tanımlamak ve ilgili hesapları yapmakta fayda sağlamaktır. İşaret işleme derslerinde, kesikli zaman işaretlerinde bu yaklaşımı bol miktarda görmüşsünüzdür. Kesikli zamana vurgu yapmak için grafikte de  $t$  yerine  $n$ , normal parantez yerine köşeli parantez kullanılması da gelenekseldir. Matematikteki "fonksiyon değişkenden bağımsızdır" sözünü burada biraz esnetiyoruz; çünkü  $t$  her değeri alabildiği halde  $n$  sadece tamsayı değerlerini alabilmektedir, ama zihnimizde. Kesikli zaman işaretlerine, aynı şey olmamalarına rağmen, bazen "sayısal işaret" (digital signal) diyoruz, ama biliyoruz ki tüm elektriksel işaretler analogdur, sayısal işaret terimi insanların uydurduğu çok faydalı bir şeydir. Bu şekilde anılmasındaki amaç, bu işaretlerin sayısal (digital) devreler ile işlendiğini ve gerçek sayısal devrelerde fonksiyon değerlerinin de (dikey eksen) kesikli olduğunu vurgulamaktır. Çünkü gerçek sayısal devrelerde sonsuz-küçük gibi şeyler yoktur.

$z[t]$  işaretini isimlendirmek gerekirse, bir miktar periyodiklik içerdiğini ama periyot sonlarında rastgele olarak + veya - yönde değiştiğini belirtmek için "kesikli zamanda yarı-periyodik antipodal sinüsoidal işaret" gibi birşey uydurabiliriz. Ama ilerleyen bölümlerde bu işaretin faz anahtarlama kiplemesinin bir örnek işaretinin sayısal örnekleri olduğunu öğrendiğimizde "PSK işareti sayısal örnekleri" olarak adlandırılması daha kısa ve anlamlı olacaktır.

$\delta(t)$  işareti de birçok fiziksel işlemi matematiksel olarak tanımlayabilmek için teoride var olup pratikte olmayan birim dürtü (unit impulse) işaretidir. Sonsuz küçük bir zamanda sonsuz değerini alan, diğer zamanlarda sıfır olan bu işareti tanımlayabilmek için burada değinmeyeceğimiz çok sayıda limit içeren yaklaşım kullanılmıştır. Örneğin "altında kalan alan 1 olan dikdörtgen darbenin genişliğini sıfıra doğru yaklaştıralım, en sonunda (sıfırda) sıfır zaman aralığında gerçekleşen ve değeri sonsuz olan birim dürtüyü elde ederiz" yaklaşımı kolay anlaşılabilir ama herşeyi ifade etmeyen bir tanımdır. Yukarı doğru çizilen ok değerinin sonsuza gittiğini göstermek içindir.  $a\delta(t)$  ise genellikle ok ucunun yanına yazılan  $a$  ile ifade edilmektedir.

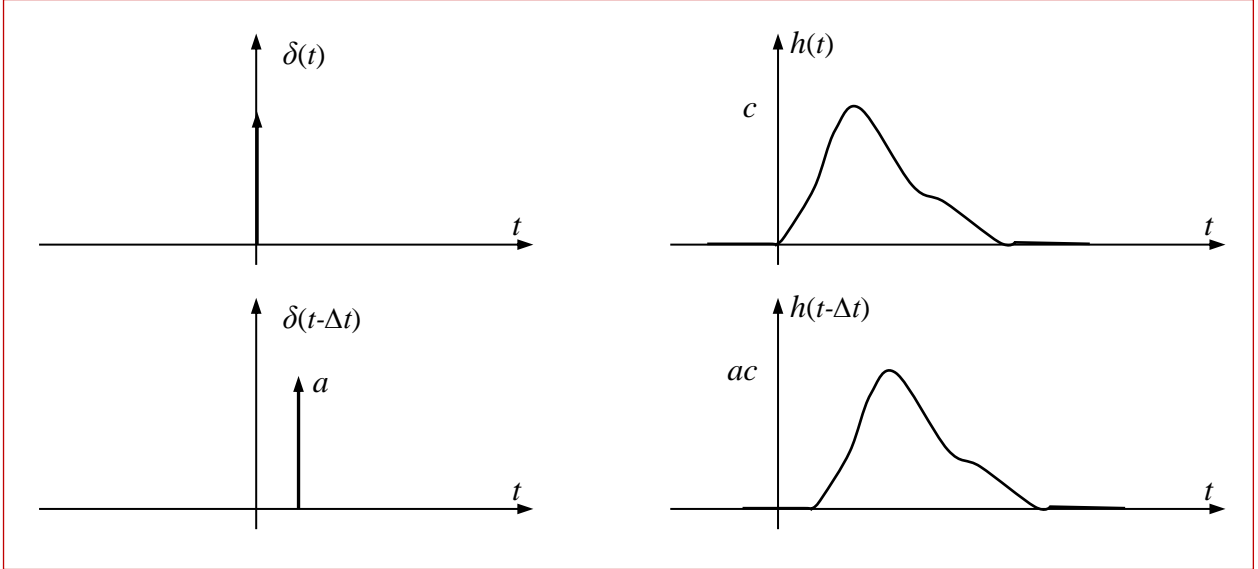
*Birim dürtünün eleme (sifting) özeliği:*  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)f(t)dt = f(\tau)$ 'dir. Bu özellik sayesinde bir fonksiyonun  $\tau$  anındaki değerini  $\tau$  anına kaydırılmış birim dürtü ile çarpımının integrali ile ifade edebiliriz. Bu durumda  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t - \tau)dt = f(-\tau)$  olmaktadır.

İşaretler üzerinde çeşitli işlevler tanımlanabilir. Bu işlevler sadece toplama, gerçek ya da karmaşık bir sabitle çarpma ve zamanda kaydırma/geciktirmeden oluşuyorsa doğrusal işlev diyoruz. Örneğin  $u(t) = 3x(t) + (1.1 + i0.2)y(t) - \Lambda(t + \pi)$  bir doğrusal işlevdir. Ancak  $z(t) = x(t)y(t)$ , eğer  $x(t)$  ve  $y(t)$  elektriksel işaretler ise, doğrusal değildir. Yani işlevin içinde iki işaretin çarpımı geliyorsa doğrusal bir işlev değildir.

Şimdi, girişinde bir işaret görmeyi sakince bekleyen (çıkış sıfır) bir sistem düşünelim. Bu sistem, girişinde birim dürtü  $\delta(t)$  gördüğü anda çıkışında bir işaret üretmeye başlasın ve biz bu çıktıya  $h(t)$  diyelim. Tabii ki nedensellik (causality) gereği  $t < 0$  için  $h(t) = 0$ 'dir. Yani sistem ancak bir girdi olduğunu gördüğü andan itibaren çıktı üretebilir. Burada, geri beslemeli yani çıktının girdi olarak alındığı ve bu nedenle devamlı olarak bir çıktı üreten (belki de osilasyon yapan), kararlı olmayan sistemleri konumuz dışına atıyoruz.

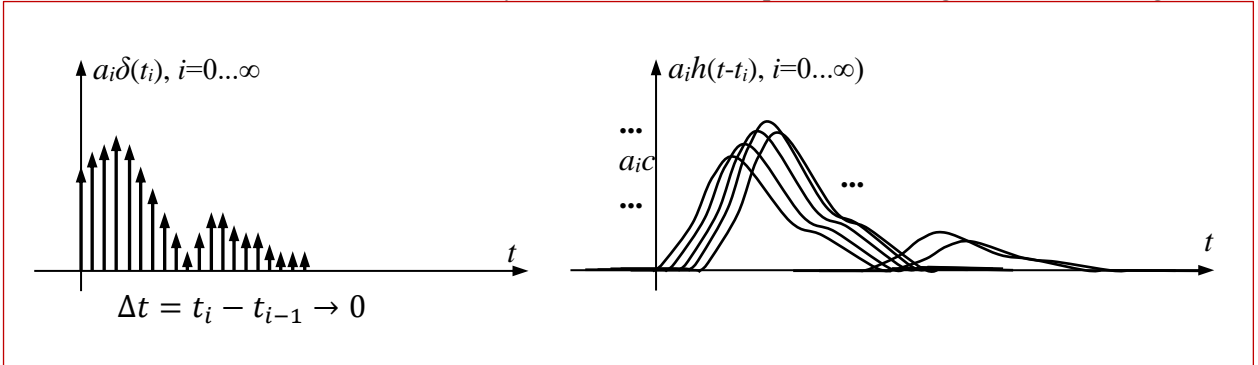
Böyle bir sistemde birim dürtü  $t=0$ 'da değil de  $\Delta t$  kadar gecikmeli geldiğinde, beklentimiz çıktı  $h(t)$ 'nin de  $\Delta t$  kadar gecikmeli, yani  $h(t - \Delta t)$  olmasıdır. Bu durumu Şekil 1.4'te gösterdik. Tabii ki sadece bir örnek gösterim. Dikey eksenini istediğimiz yere koyup oraya  $t=0$  diyebiliriz.

Şekil 1.4. Nedensel sistemin zamanda kaymış  $\delta(t)$  girdisi için çıktısı.



Şimdi de girdinin tek bir andaki birim dürtü değil de  $x(t)$  gibi sürekli bir işaret olduğunu varsayalım.  $x(t)$  işaretini büyüklükleri farklı sonsuz adet birim dürtünün toplamı şeklinde gösterebiliriz.

Şekil 1.5. Sürekli bir işaretin sonsuz sayıda birim dürtünün toplamı şeklinde gösterimi ve karşı gelen



sistem çıktıları.

Sistem çıktısının da sistemin her bir  $a_i \delta(t_i)$  girdisine karşı ürettiği  $ca_i h(t_i)$  çıktılarının toplamı olacağını varsayıyoruz. Yani,

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i h(t - t_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i) h(t - i\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t - \tau) d\tau \quad (1.1)$$

Bu varsayım aynı zamanda sistemin doğrusal ve zamanla değişmeyen (LTI: linear, time invariant) olduğu varsayımdır.

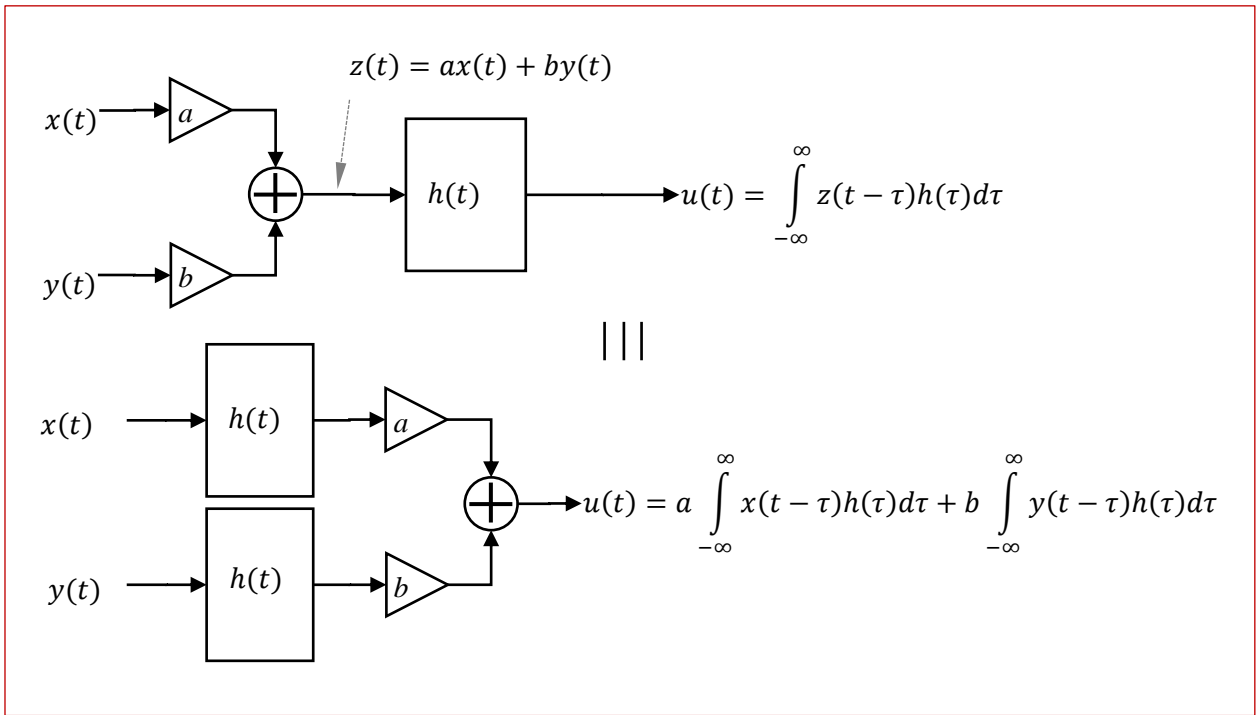
Buna göre önceki yıllardaki derslerimizden bildiğimiz, evrişim (convolution) olarak tanımlanan

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t - \tau) d\tau \quad (1.2)$$

integrali de doğrusal bir işlemdir. Çünkü  $h(\cdot)$  bir işaret değil sonsuz adet çarpandır ve işlev sadece zamanda kaydırma, çarpma ve toplamadan (integral) oluşmaktadır. Biliyoruz ki  $h(t)$ , girişine birim dürtü uygulanan

bir doğrusal sistemin çıkışında gördüğümüz işarete eşittir. Çoğu yerde  $h(\cdot)$  yerine onun birim dürtü tepkisi olduğunu vurgulamak için de  $h(t)$  kullanırız. Ancak fonksiyonun bir işaretin zaman fonksiyonuna eşit olması onun zamanın bir fonksiyonu olup değerinin zamanla değiştiğini göstermez. Bu işlevin zamanla değişmediğini vurgulamak için zamanla değişmeyen (time-invariant) işlev deriz. İşlevin zamanla değişmeyen olması doğrusal olduğunu göstermez. Yani doğrusallık ve zamanla değişmezlik birbirinden farklı kavramlardır. İşlevin hem doğrusal hem de zamanla değişmeyen olması (LTI : linear time invariant) sistemler üzerindeki incelemeleri oldukça kolaylaştırır. İşlev zamanla değişen olsaydı  $h(t)$  gösterimi yetmez, bir bağımsız değişken daha ( $h(t, t_d)$  gibi) eklemek zorunda kalırdık. Şekil 1.6, birim dürtü tepkisi (impulse response)  $h(t)$  olan bir LTI işlevin gerçekleştirilmesi gereken doğrusallık özelliğini vurguluyor.

Doğrusallık, bir işlevin girdisini istediğimiz kadar parçaya (sonsuz olabilir) ayırıp herbiri için çıktıyı hesaplamamızı ve ardından, toplam çıktıyı bulmak için, çıktıları toplayabilmemizi sağlıyor. Böylelikle işaretlerin ve işlevlerin analizi kolaylaşıyor.



Şekil 1.6. Bir LTI işlevin doğrusallığını vurgulayan denklik.

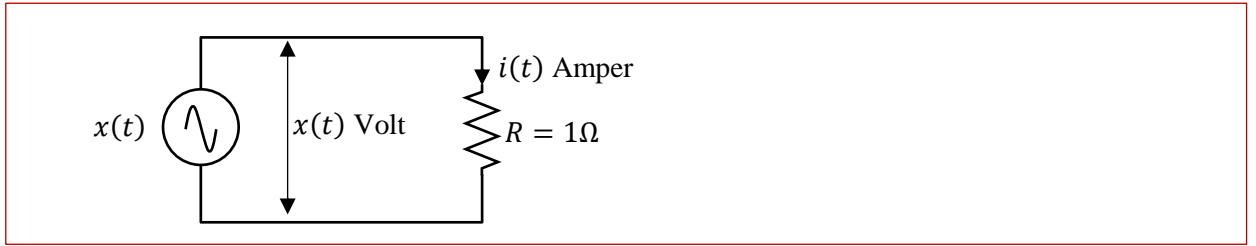
Doğrusal olmayan bir işlev söz konusu olduğunda, doğrusal sistemler için geliştirilen pek çok yöntem kullanılamaz. Ama bazı durumlarda, işlevi parçalı doğrusal işlevlerin toplamı şeklinde yazıp yaklaşık sonuçlara razı olabiliyoruz, çünkü sistem doğrusallıktan uzaklaştıkça çözümlene de zorlaşıyor. Birçok durumda, elektronik sistemi oluşturan aktif elemanlar gerçekte doğrusal bir karakteristiğe sahip olmadıkları halde, normal çalışma şartlarında yaklaşık doğrusal kabul edilip işlem yapılır. Bunun yapılabilmesi için ise sistemin girdi ve çıktı sınırlarının tasarımıyla belirlenmesi gereklidir. Sistem doğrusal olduğunda analiz/çözümlemede kullanılacak önemli yaklaşımlardan birisi işaretleri başka işaretlerin doğrusal toplamı şeklinde yazmak ve yine aynı işaretlerin doğrusal toplamı şeklinde bir çıktı işareti elde etmektir. Bu yöntemlere doğrusal dönüşüm (linear transform) ismi verilir. Sonraki bölümde hatırlatma şeklinde yer alan Fourier Dönüşümü bunlardan birisidir.

Her analiz/çözümlemede olduğu gibi haberleşme işaretleri üzerinde de onların özelliklerini, birbirlerinden farklarını/benzerliklerini belirlemek için bazı formülasyonlar/büyükklüklere ihtiyaç vardır ve kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıdaki kısımlarda özetlenmektedir. Bu özetler aynı zamanda ortak bir dil oluşturmak için gereklidir. Öğrencinin, ilgili formülleri tam olarak hatırlamasa da (zaten kaynaklardan bakılıp tazelenabilir), kavramsal olarak ne anlama geldiğini tam olarak bilmesi/özümsemesi gereklidir. O nedenle, ders başlangıcında gerekli zamanı ayırarak, kavramları pekiştirmeniz oldukça önemlidir.

### Enerji, Güç:

Bir işaretin enerjisi, işaret kaynağı  $1 \Omega$ 'luk yüke bağlandığında (Şekil 1.7) yükte harcanan enerji olarak tanımlanır. İşaret kaynağının iç empedansının sıfır olduğu ve yük direnç değeri ne olursa olsun uçlarındaki voltajın işaret ile aynı olduğu varsayılır;

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.3)$$



Şekil 1.7. Bir işaret kaynağının  $1 \Omega$ 'luk yük direncine bağlanması.

Tanımda enerjinin birimi  $\text{Volts}^2/\text{Ohm}=\text{Joules}$ 'dür. Hesaplanacak enerji sonsuz çıkacak ise, örneğin  $x(t) = c, c \neq 0$ , birim zamanda harcanan enerjiden bahsedilir;

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

Birim zamanda üretilen/harcanan enerjiye işaretin gücü ismi verilir ve bu da zamanla değişebilir. İşaretin hesaplanan enerjisi sonlu ise enerji işareti (energy signal) aksi halde gücü sonlu ise güç işareti (power signal) olarak anılır. İşaret enerji ya da güç işareti olmak zorunda değildir. İşaret periyodik ise limit işlemine gerek kalmaz;

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |x(t)|^2 dt \quad (1.5)$$

Gücün birimi Watt'tır. Bazı durumlarda, işaret periyodik olmasa da, karakteristikleri periyodik olarak tekrar ediyorsa, yaklaşık bir değer bulmak için yine (1.5) kullanılabilir. Sayısal Haberleşmede kullanılan işaretlerin hemen hepsi enerji işaretlerinin zamanda ardışıl ama rastgelelik içeren bir şekilde dizilmesiyle oluşmaktadır. O yüzden hem enerji hem de güç özellikleri irdelenebilmektedir.

### İstatistiksel Özellikler:

İşaretin ortalama değeri

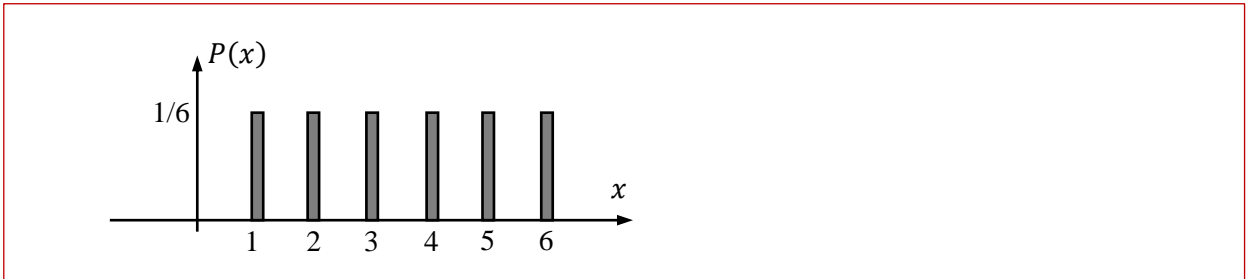
$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanıyor. Tabii ki, işaret sabit bir sayı ise ortalama değeri kendisidir. Eğer işaret periyodik ise yine limit içeren (1.6) denkleminde ihtiyaç yok. Bir periyot için ortalamayı hesaplamak yeterli;

$$m_x = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) dt \quad (1.7)$$

Bu işlemleri ancak  $x(t)$  bir fonksiyon şeklinde yazılabilirse ya da zamanla karakteristiklerinin değişmediğini biliyorsak yapabiliriz. Ama fonksiyon şeklinde yazamadığımız işaretler (örneğin gürültü) için de istatistiksel özellikleri hesaplayabilmek isteriz. Bunun için öncelikle olasılığın basit temellerine değineceğiz. Örneğin hilesiz bir madeni para yazı-tura atmakta kullanılsın ve 100 deneme yapılsın. Para gerçekten hilesiz ise, bu denemeler sonucunda beklentimiz 50 adet yazı ve 50 adet tura gelmesidir. Tabii ki beklentimiz karşılanmayabilir ve sonuçlar eşit olmak yerine eşite yakın dağılır. Ancak burada 50 sayısı yazının ve turanın olasılıklarını temsil ederler. Teknik olmayan işlemlerde olasılığı 100 üzerinden söylesek de, matematikte olasılığı neredeyse her zaman normalize edilmiş şekilde, yani 1.0'luk bütünün parçası olarak ifade ederiz. Yani yazı ve turanın olasılığı eşit şekilde 0.5'tir. Tabii ki parçaların toplamı 1.0 eder.

Benzeri bir örnek de hilesiz zar atma olayıdır. Zarın tüm yüzlerinin gelme olasılığı eşit ve 1/6'dır. Ya da 5 ve 5'ten büyük gelme olasılığı 1/3'tür. Her iki örnekte de toplam olasılık 1.0'dir. Zar yüzlerindeki sayılar ile olasılıklarını ifade eden bir grafik çizilmek istenirse Şekil 1.8 elde edilir.



Şekil 1.8. Zar olasılıklarını gösteren grafik.

Şekil 1.8'deki grafiğe olasılık kütle fonksiyonu (pmf: probability mass function) ismi verilir. Bu örnekte olduğu gibi yatay eksen tam sayılar olmayabilir, olasılıklar eşit olmayabilir, negatif yatay eksen değerleri olabilir. Ancak olasılıklar her zaman pozitif ve toplamı 1.0'dır. Yatay eksen ise rastgele değişken ya da rassal değişken'in (random variable) alabileceği değerler eksenidir.

**Rastgele değişken (random variable) :** ölçümü yapılan olay ya da değer (örneğin gelen zarın üzerindeki sayı). Çoğunlukla büyük harfle gösteriyoruz, örneğin  $X$ . Bunun alabileceği herhangi bir değeri de küçük harfle gösteriyoruz, örneğin  $x$ .  $x$ 'in aldığı özel değerleri de genellikle indisli şekilde gösteriyoruz, örneğin  $x_i$ . Özel değerler bir sayı (örneğin 5) ya da onu ifade eden bir harf (örneğin a) da olabiliyor. Örnek olarak,  $X$  zar atma olayı için  $P(x = 3) = \frac{1}{6}$  zarın 3 gelme olasılığının 1/6 olduğunu söylüyor.  $\sum_{i=1}^6 x_i = 1$  ise toplam olasılığın 1 olduğunu söylüyor.

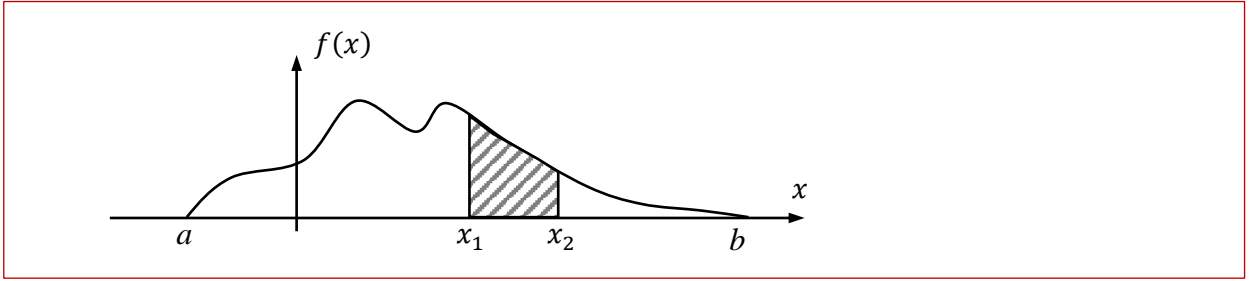
Ölçülen büyüklüğün alabileceği değer sayısı zar örneğinde olduğu gibi sınırlı sayıda olmayabilir. Örneğin yoldan geçen insanların ağırlığı, geçen araçların aralarındaki süre, uzağa atılan taşların katettiği



mesafe gibi çıktılar ile ilgili grafikler çiziyor olalım. Bu durumda bu rastgele olay ile üretilen değerler (yatay eksendeki değerler) sadece belirli değerleri değil bir aralık içindeki her değeri alabilir. Ancak her aralığa düşme olasılığı aynı değildir. Bu durumda çıktıların belirli değerler arasında olma olasılıklarını da gözetken sürekli bir grafik çiziyor olacaktık. Böyle bir grafik Şekil 1.9'deki gibi olsun. Burada  $x$  ölçülen değer, yani rastgele değişken,  $f(x)$  ise Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (pdf: Probability Density Function) adını alır. Tüm eğrinin altında kalan alan 1.0'dır.  $x$  rastgele değişkeninin  $(x_1, x_2)$  aralığında olma olasılığı şekildeki taralı alandır. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.0 \quad (1.8)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 < x < x_2). \quad (1.9)$$

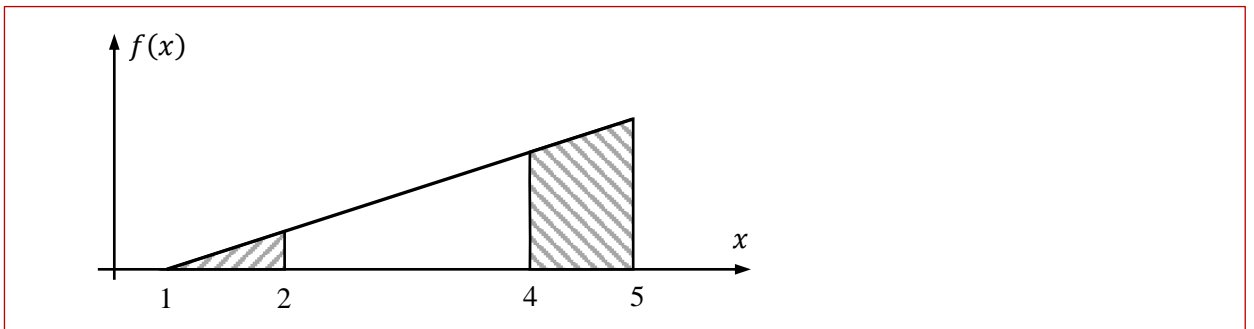


Şekil 1.9. Örnek bir olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.

**Beklenen Değer (expected value)** : Beklenen değer, matematikte gördüğümüz ağırlık merkezine benzer.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (1.10)$$

Şekil 1.10'daki olasılık yoğunluk fonksiyonunu ele alalım. Rastgele değişken 1 ile 5 arasında değerler alabilmektedir, ancak 5'e yakın yerlerde bulunma olasılığı daha fazladır.



Şekil 1.10. Örnek olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerindeki taralı alanlar rastgele değişkenin (1,2) ve (4,5) aralıklarında bulunma olasılıklarıdır.

$f(x)$  bir doğru, 1'deki değerinin sıfır ve altında kalan alan 1 olduğuna göre pdf'i  $f(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$  ( $1 < x < 5$ ) olarak hesaplayabiliriz. Bu durumda taralı alanlar  $\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{16}$  ve  $\int_4^5 f(x)dx = \frac{7}{16}$  olarak hesaplanabilir (diküçgen geometrisi de kullanılabilir). Eğer bu alanlar kalınlığı aynı olan levha parçaları olsalardı ağırlık merkezleri tam ortada ( $x=3$ ) olmak yerine daha sağda olurdu. Peki, levha tüm  $f(x)$ 'in altında kalan alan ile belirtiliyor olsaydı ağırlık merkezi nerede olurdu? Bu durumda beklenen değer hesabı yapıyoruz ve  $E(X) = \int_1^5 xf(x)dx \cong 3.67$  buluyoruz.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) çoğunlukla  $f(\cdot)$  ile gösterilir. Olasılık kütle fonksiyonu (pmf) ise  $P(\cdot)$  ile gösterilmektedir. Pmf grafiğinde rastgele değişkenin olası her bir değerine karşılık onun olasılığı gösterilir. Pdf grafiğinde ise rastgele değişkenin verilen bir aralık için aralıkta bulunma olasılığı o aralıkta grafiğin altında kalan alan ile hesaplanır. Pmf için beklenen değer de, kesikli rastgele değişkenin beklenen değeri formülü

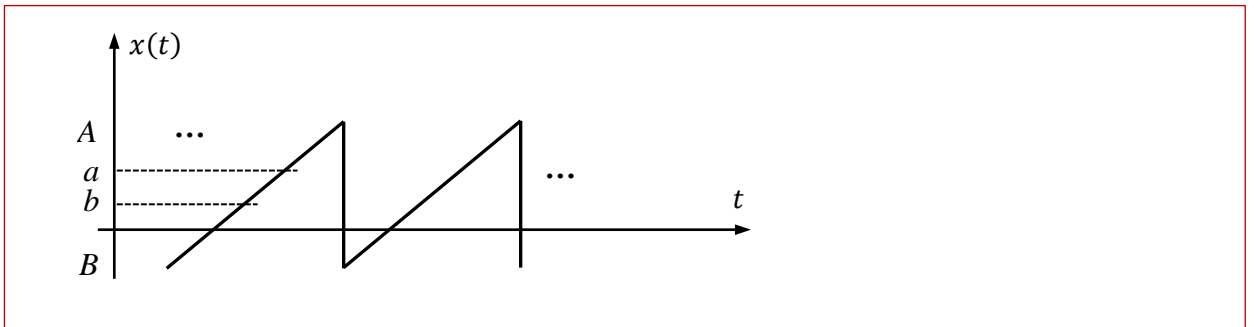
$$E(X) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i P(x_i) \quad (1.11)$$

ile hesaplanır. Benzeri şekilde kesikli rastgele değişkenin ortalama değeri de işaretin  $x_i$  örneklerinden

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \quad (1.12)$$

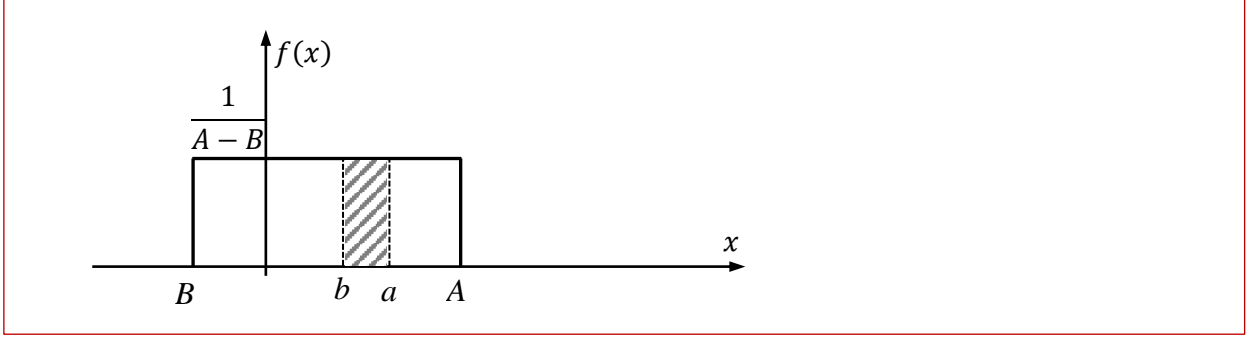
ile hesaplanır. Burada işaretten sınırlı sayıda örnek alınabileceği için aslında *örneklerin ortalaması* olarak isimlendirilmesi gerekir. İşaretten sonsuz sayıda örnek alındığı (yada alınan örneklerin işareti tam olarak temsil ettiği) varsayılırsa ya da rastgele deneyin (örneğin zar atma) sonsuz sayıda tekrar edildiği varsayılırsa, beklenen değer ortalama değere eşit olması gerekir. Aynı eşitlik sürekli rastgele değişkenler için de geçerlidir.

Bir işaretin *olasılık dağılım fonksiyonu* deyince işaretin değerine göre verilen bir değer aralığında bulunma olasılığının hesaplanabileceği pdf'i kastediyoruz. Örneğin Şekil 1.11'deki testere dişi şeklindeki periyodik işareti ele alalım. Rastgele bir zamanda (işaretten habersiz olarak) işarettten alınan örnek  $B$  ile  $A$  arasında herhangi bir değerde olabilir ve bu aralık içindeki,  $A \geq a \geq B$ ,  $A \geq b \geq B$  ve  $|a - b| = \text{sabit}$  olmak üzere verilen tüm  $(b, a)$  aralıklarında bulunma olasılığı aynıdır.



Şekil 1.11. Testere dişi şeklindeki işaret, benzeri birçok işaret gibi düzgün dağılıma sahiptir.

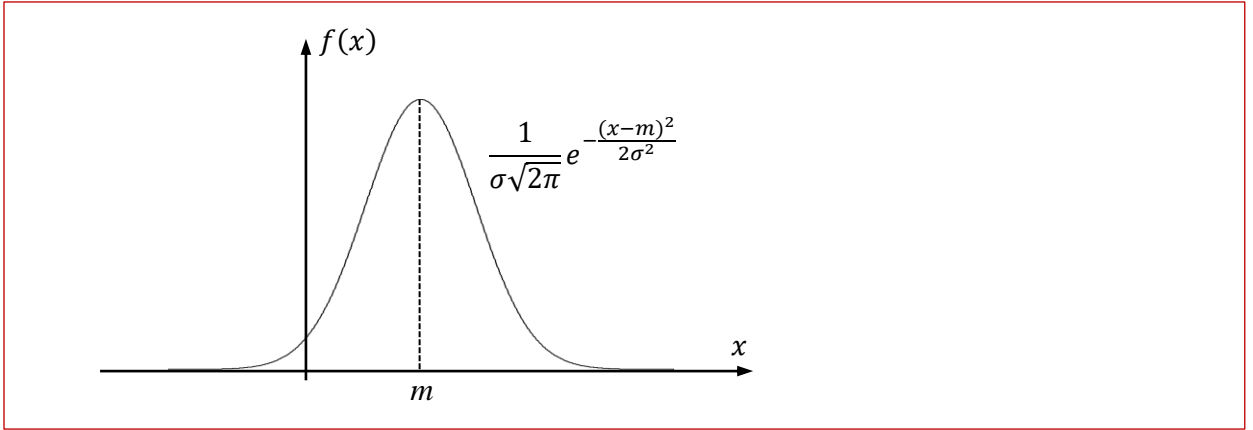
Yani işarettten rastgele (işaretin hangi değerde olduğunu bilmeden) alacağımız bir örneğin olasılık dağılım fonksiyonunu çizersek Şekil 1.12'deki düzgün (uniform) dağılımı elde ederiz.



Şekil 1.12. Düzgün olasılık yoğunluk fonksiyonu örneği.

Zar atma deneyi de kesikli düzgün dağılım gösteren sonuçlar üretir. Yani hilesiz bir zarı çok defa atarsak her yüzü eşit sayıda gelmesi gerekir. Gerçekte küçük farklılıklar gösterebilir ama anafikir anlaşılmıştır, nihayetinde zarı sonsuz sayıda atamayız.

Düzgün pdf gibi çok karşılaşılan bir diğer dağılım ise normal (Gaussian) dağılımdır.



Şekil 1.13. Normal (Gaussian) dağılımı gösteren olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Şekil 1.13'de gösterilen normal dağılımda,  $m$  çan şeklindeki dağılımın beklenen değeri,  $\sigma$  ise eğrinin ne kadar geniş (basık) olduğunu gösterir.  $\sigma$ 'ya *standart sapma* (standard deviation) ismi verilir. Doğal olarak, bu sayı ne kadar büyük ise işarette ortalamadan uzak değerlerin bulunması ihtimali o kadar yükselir. Bu da, normal dağılım gösteren bir işaretin enerjisinin büyüklüğüne paraleldir.

İşaretin anlık değerlerinin ortalamadan uzaklıklarının karelerinin ortalaması ise *varyans* (variance) olarak isimlendirilir. Varyans ve standart sapma pozitif (sıfır dahil) değerler alabilir. Tanım olarak  $Var(x) = \sigma^2$ , dolayısıyla

$$\sigma_x = \sqrt{E((x - m)^2)} \quad (1.13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ikisinin sıfır olması işaretin sabit (DC ya da sıfır) olduğunu söyler. Kesikli bir işaret için de (zar atma deneyi dahil) varyans ve standart sapma kesikli formüllerle hesaplanır ve sınırlı sayıda örnek varsa sonuçlar *örnek setinin varyansı* ve standart sapması olarak adlandırılır;

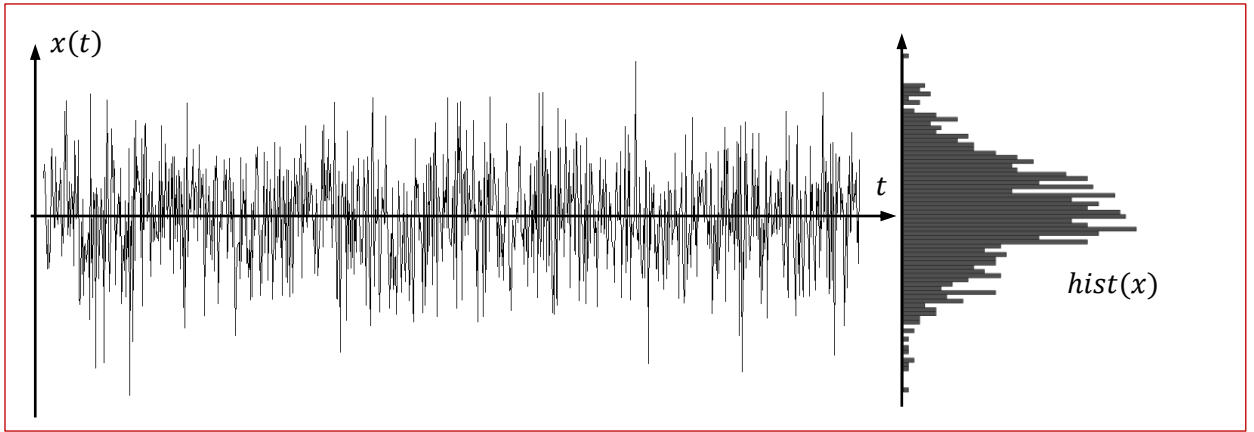
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m)^2 \quad (1.14)$$

Standart sapma ile elektrikte sinüsoidal şebeke gerilimi işaretleri için kullandığımız rms (root-mean-square) değeri arasında sıkı bir ilişki vardır. RMS değeri;

$$V_{rms} = \sqrt{E(x^2)} \quad (1.15)$$

şeklinde tanımlandığından, rms değerinin standart sapmaya eşit olması için beklenen değerinin sıfır olması gerekir (denklemler (1.13) ve (1.15)).

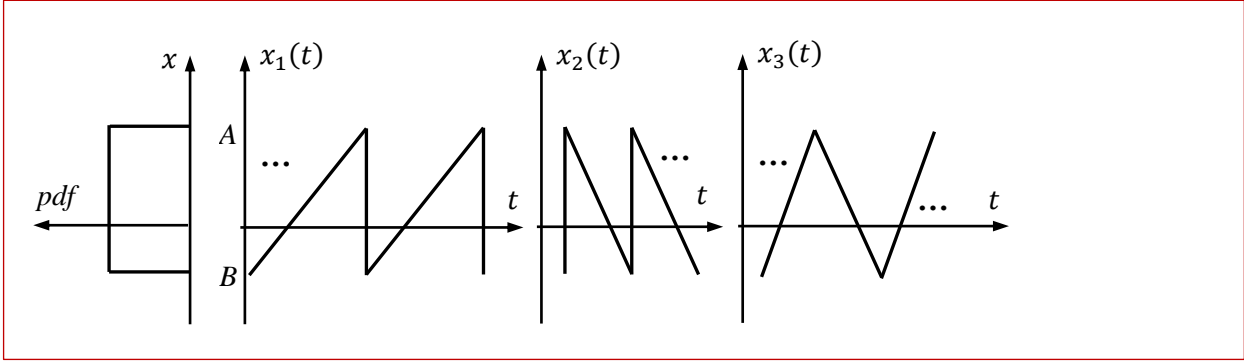
Şekil 1.14,  $m=0$  ve  $\sigma=1$  normal dağılımına sahip bir rastgele değişkenden alınmış 1000 adet örnek ve bu örnekler ile hesaplanmış 80 bölümlü *histogram* göstermektedir. Şekildeki histogram, oldukça büyük ve oldukça küçük iki sayı arasında 78 eşit alt aralığa bölüp her bir aralığa düşen örnek sayısını çubuk grafik halinde vermektedir. (Not: Normal dağılımlı bir rastgele değişken  $(-\infty, \infty)$  aralığında değerler alabilir. Ancak bilgisayarda böyle geniş aralıkları hakkıyla temsil edemediğimizden, eşit aralık dememize rağmen, ilk ve son aralığın genişlikleri sonsuz yapılmıştır, ki normal dağılıma benzer bir grafik çizebilelim. Yani gerçekten bir normal dağılım değil, sanki-normal bir dağılımdır).



Şekil 1.14. Normal dağılımlı gürültü ve 1000 örnek ile hesaplanmış 80 bölümlü histogramı.

Histogramın, Şekil 1.13'de verilen normal dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonuna benzediğini görebiliriz. İsimlerinden anlaşılacağı üzere histogram, olmuş olaylar/eldeki verilerin grafiğidir, pdf ise olması beklenen (olası) dağılımdır. Ne kadar çok ve tarafsız (not biased) örnek alınırsa histogram pdf'e o kadar benzer.

Aynı histogram/pdf'i veren sayısız fonksiyon olabilir. Örneğin Şekil 1.15'teki periyodik işaretlerin tümü aynı düzgün olasılık dağılımını gösterirler. Ayrıca dağılım periyottan bağımsızdır.



Şekil 1.15. Aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip 3 örnek işaret.

Peki verilen bir periyodik işaretten alınacak örneklerin olasılık yoğunluk fonksiyonunu nasıl hesaplarız? Ya da pdf'i verilen bir işaretin periyodik olduğunu biliyorsak, verilen pdf'e sahip olası sonsuz adet işaretten bir tanesini nasıl bulabiliriz? Bu konu, pek ilgilenmediğimizden, bölüm sonuna doğru ele alınmıştır.

**İşaretlerin Benzerliği** : İki işaretin birbirine ne kadar benzediği birisinin diğeri üzerindeki izdüşümü (projection) hesaplanarak bulunur;

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt \quad (1.16)$$

İzdüşüm işlemi sonucunda elde edilen değere korelasyon katsayısı (correlation coefficient) ismi verilir (yada bazen sadece korelasyon), ve işaret işlemede  $R_{x_1x_2}$  şeklinde ya da kısaca  $R$  ile gösterilir.  $R$ 'nin anlamlı ve sınırlı bir değer çıkması için işaretler ya darbe fonksiyonları olmalı ya da

$$R_{x_1x_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t)dt \quad (1.17)$$

ile normalize edilerek hesaplanmalıdır. Periyodik işaretler için, başka benzerlik katsayıları ile karşılaştırılacak ise, bir periyot boyunca benzerliğe bakmak yeterlidir;

$$R_{x_1x_2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t)dt \quad (1.18)$$

Hatta karşılaştırma için  $1/T$  çarpanına bile ihtiyaç yoktur. Örneğin, " $x(t)$  işareti  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ 'den hangisine daha çok benziyor?" sorusunun cevabı için

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)x_1(t)dt \stackrel{?}{>} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)x_2(t)dt \quad (1.19)$$

karşılaştırmasına bakmak yeterlidir.

Korelasyon, matematikteki içsel çarpımın (inner product) özel bir durumudur. Sınırlı örnekli kesikli işaretler için,  $X_1$  ve  $X_2$  iki işaretten alınan  $N$ 'er adet örneğin dolduruldukları satır matrisleri olmak üzere  $R = X_1 \cdot X_2^T = \sum_{i=0}^{N-1} X_1[i]X_2[i]$  ile hesaplanabilir.

Örnek:  $\sin(t)$  ile  $\cos(t)$  birbirlerine ne kadar benziyorlar?

$$R = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = -\frac{1}{4} \cos(2t) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

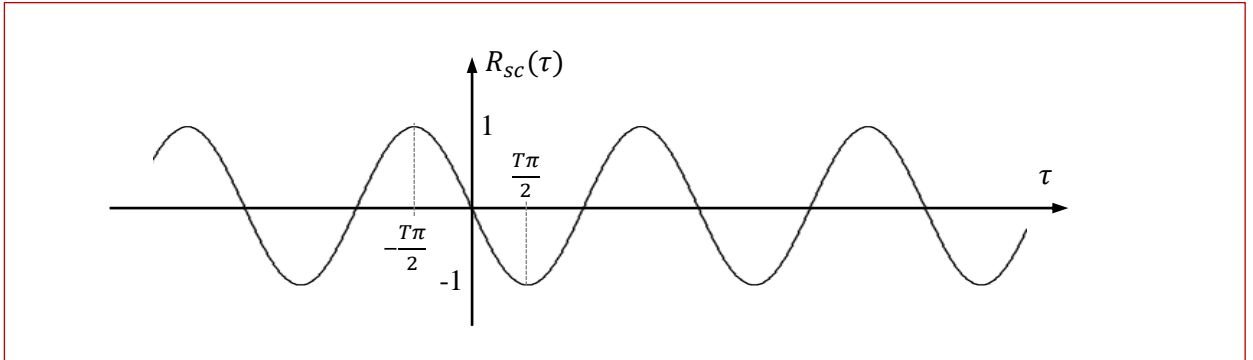
Yani bu fonksiyonlar birbirlerine hiç benzemiyorlar (!?). Biliyoruz ki bu fonksiyonlar birbirlerinin sadece zamanda kaymışları. Aslında, hesapladığımız şey, bu fonksiyonların birbirleri üzerindeki izdüşümleri, ve verildikleri haliyle izdüşümün sıfır olduğunu görüyoruz. Eğer  $R = 0$  ise bu fonksiyonlara "birbirlerine dik" (orthogonal) diyoruz.  $\mathbb{R}^2$ 'de dik iki vektörün birbirleri üzerindeki izdüşümlerinin sıfır olması ile eşdeğer olan bu durum, fonksiyonlar için de geçerli. Zamanda kayma, vektörlerin  $\mathbb{R}^2$  düzleminde dönmesi ile aynı. Lineer Cebirdeki eşleniklerini bilmek/öğrenmek bir yana, işaret işlemede (ve haberleşme sistemlerinde) çoğunlukla işaretlerin zamanda kaymışlarının da benzerliklerini bulmak istiyoruz. Bunun için korelasyon fonksiyonu (correlation function) tanımlıyoruz;

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt \quad (1.20)$$

$R_{x_1 x_2}(\tau)$  fonksiyonunun değerleri  $R_{x_1 x_2}$  ile aynı şekilde hesaplanıyor ama işaretlerden birisi önce  $\tau$  kadar kaydırılıyor.  $\tau$  farklı değerler aldıkça benzerlik değeri de değişiyor. O nedenle  $R_{x_1 x_2}$   $\tau$ 'ın bir fonksiyonu. Bu durumda,  $\sin(t)$  ile  $\cos(t)$ 'nin birbirlerine benzerliklerini, (1.18)  $\tau$  kaymasını da ekleyerek yeniden ifade edelim;

$$R_{sc}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(t) \sin(t + \tau) dt \quad (1.21)$$

Şekil 1.16'te görüldüğü gibi, benzerlik periyodik olarak tekrar ediyor.



Şekil 1.16. Aynı frekanslı Sin ve Cos işaretlerinin benzerliği.

Benzerliğin tüm fonksiyonlar için  $(-1,1)$  aralığında çıkması için bulunan fonksiyonu  $\max|R_{sc}|$ 'ye bölerek normalize edebiliriz. Bu durumda da fonksiyonun ismi normalize çapraz korelasyon (normalized cross correlation) olur.

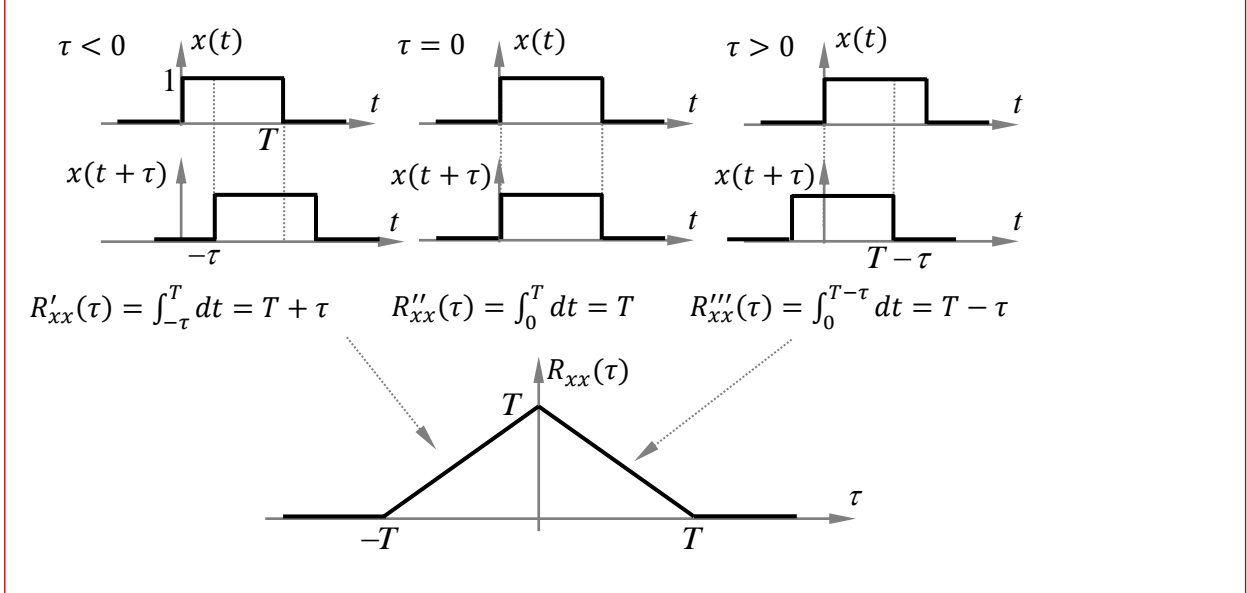
Örnek olması için bir de bir dikdörtgen darbenin kendisine ne kadar benzediğini çapraz korelasyon fonksiyonunu bularak görelim. Dikdörtgen darbeyi

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < T \\ 0 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımladığımızda, Şekil 1.17'te görüldüğü gibi

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} T + \tau, & -T < \tau < 0 \\ T - \tau, & 0 < \tau < T \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

bulunur.



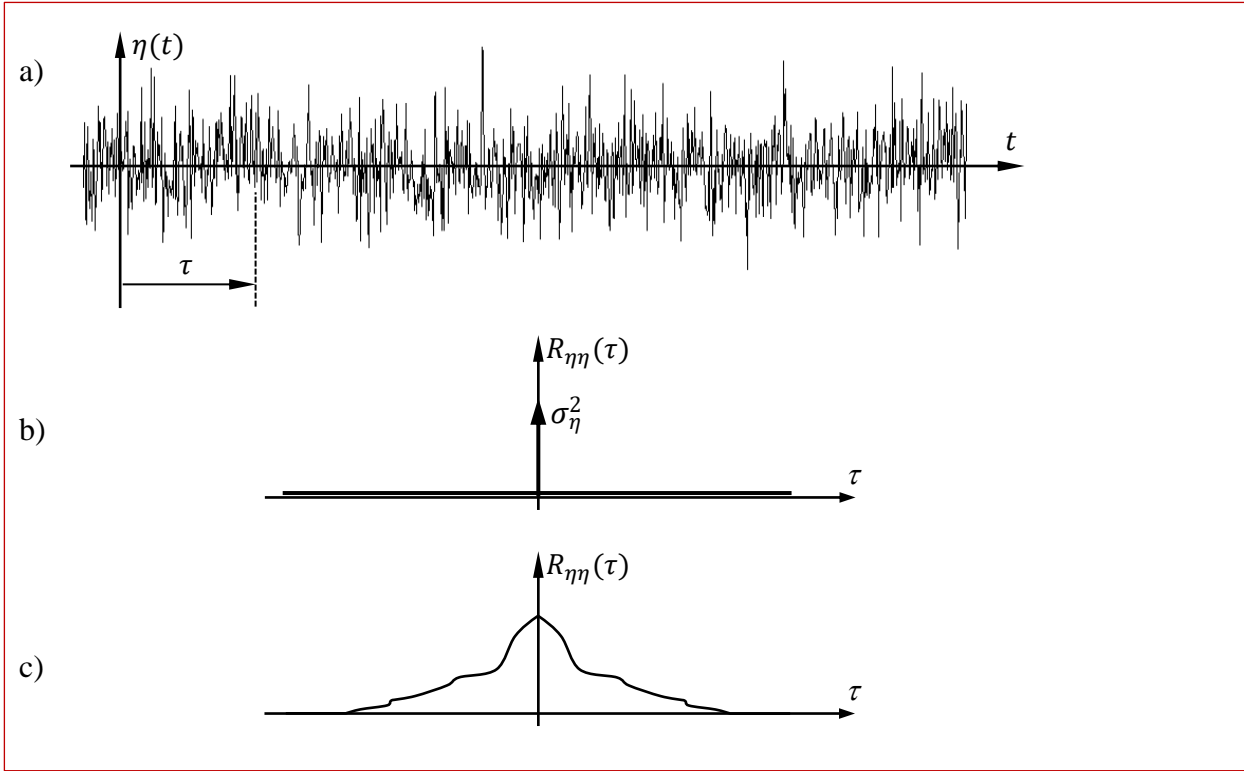
Şekil 1.17. Dikdörtgen darbenin otokorelasyonu.

İşaretin kendi kaymış halleriyle benzerliğini gösteren korelasyon fonksiyonuna *otokorelasyon fonksiyonu* (autocorrelation function) ya da kısaca otokorelasyon ismi verilir (Türkçe'de korelasyon yerine ilinti yada bağıntı kelimeleri de yaygın kullanılmaktadır). Dikdörtgen darbe örneğindeki gibi otokorelasyonun  $\tau=0$ 'da en yüksek değerini alması, diğer  $\tau$  değerlerinde de monoton olarak azalması beklenir. Peryodik işaretlerde de otokorelasyonun periyodik olarak tekrar etmesi (en yüksek değerinin de) doğaldır. Otokorelasyon, bir işaretin anlık değerinin önceki (yada sonraki) değerleriyle ne kadar ilintili olduğunu gösterir. Korelasyon ve otokorelasyon işlemlerine haberleşmede çok önem veriyoruz, çünkü sayısal bir alıcı sistemi kanaldan aldığı işaretlerin beklenen işaretlerle benzerliğine bakarak ne gönderilmiş olduğuna karar verecek. Hatta, çoğu durumda, eşzamanlamayı da buna göre yapacak.

#### Gürültü işaretinin otokorelasyonu:

Gürültüyü asıl taşınmak istenen işaretin dışında olup asıl işaretin üzerine toplanan ve işareti tanımada belirsizlik yaratan işaret olarak tanımlamıştık. Herhangi bir andaki değeri önceki ve sonraki değerlerinden tamamen bağımsız ise (tanım gereği), buna ilintisiz gürültü diyoruz. Şekil 1.18'deki işaret böyle bir gürültü olsun.  $\eta(t)$ 'nin ilintisiz olduğunu söylediğimize göre,  $R_{\eta\eta}(\tau)$ 'nin  $\tau \neq 0$  değerlerinde, grafikte gösterildiği gibi, sıfır olmasını bekliyoruz. Ancak  $\tau=0$ 'da otokorelasyonun  $R_{\eta\eta}(\tau=0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\eta(t)|^2 dt$  işaretin gücüne eşit olduğunu görüyoruz. Bu durumda 0'daki darbe işaretinin ucuna  $\sigma_\eta^2$ , yani gürültünün varyansı yazmamızda bir problem yoktur.

Tabi ki tüm gürültü işaretlerinin tam ilintisiz (uncorrelated) olması gerekmiyor. Şekil 1.18'da alttaki grafikte tam ilintisiz olmayan bir gürültü örneği otokorelasyonu verilmiştir. Bu iki gürültü örneğinin tayfsal içeriği konusuna Fourier Transformu bölümünde değineceğiz.



Şekil 1.18. İlintisiz ve ilintili gürültü otokorelasyon örnekleri. a) Gürültü, b) İlintisiz gürültünün otokorelasyonu, c) Geçmiş yada gelecek değerlerine bir miktar bağımlı gürültünün otokorelasyonu.

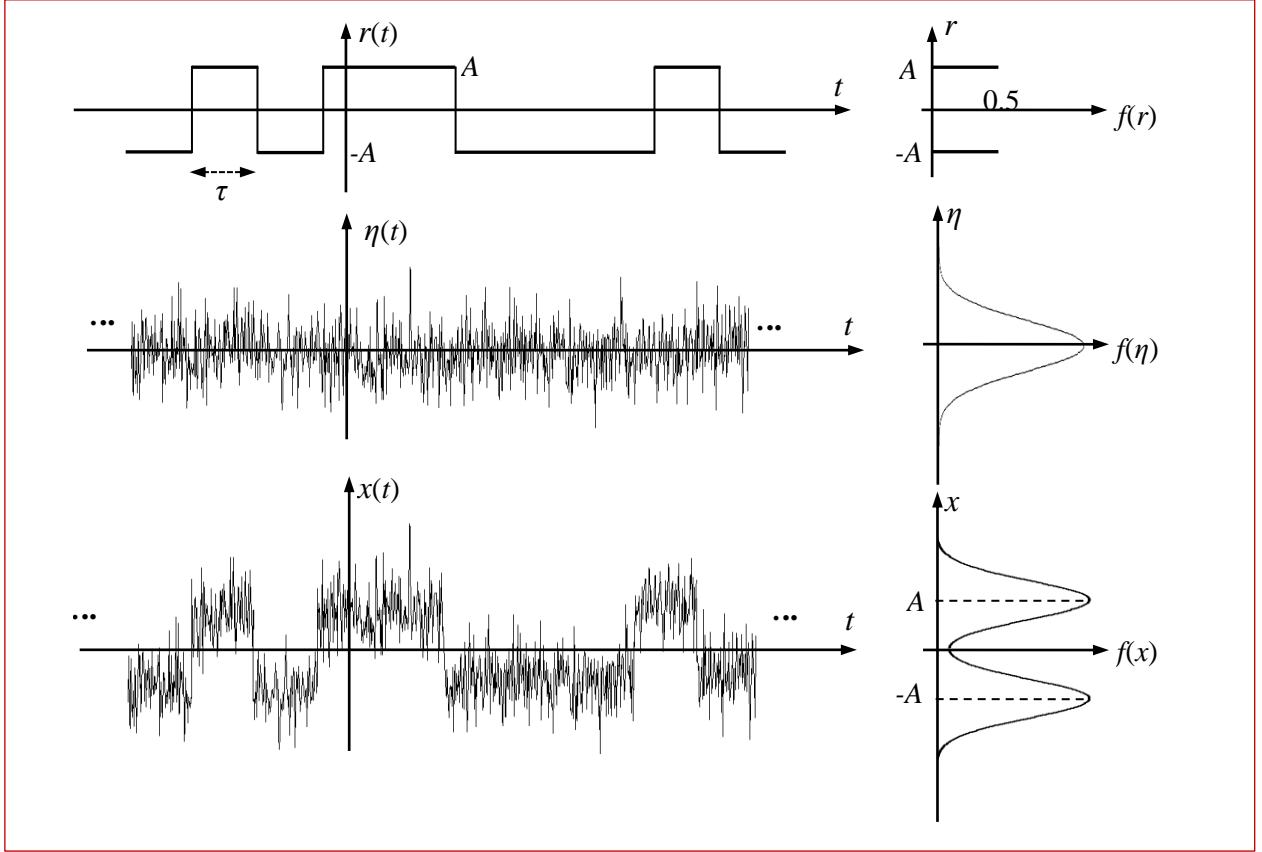
### Gürültülü İşaret:

Şekil 1.3'te verilen  $r(t)$  ikili rastgele akış ve  $\eta(t)$  gürültü işaretinin doğrusal toplamından oluşan  $x(t) = r(t) + \eta(t)$  işaretinin istatistiksel özelliklerini inceleyelim. Bu iki işaretin aralarında hiçbir korelasyon olmadığını varsayalım. Şekil 1.19 bu iki işaretin toplamını göstermektedir. Yine, veri işaretinin (ikili akış)  $+A$  ve  $-A$  değerlerini eşit olasılıklara (0.5) sahip olduğunu, gürültünün de ortalama değerinin sıfır olup normal dağılım gösterdiğini varsaydık. Bu durumda,  $x(t)$  toplam işaretinin olasılık dağılımı  $f(x)$  ile gösterilmiştir. Dağılım normal değil ama iki adet normal dağılımın ağırlıklı ortalaması olmaktadır. Ağırlıklar ise 0.5'tir. Tabii ki, olasılık derslerinden hatırlamamız gereken "bağımsız iki işaretin toplamının dağılımı, dağılımlarının evrişimidir" kuralını burada kullandık. Yani,

$$f(x) = f(r) * f(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x - \tau) f_\eta(\tau) d\tau \quad (1.22)$$



Şekil 1.19. Veri işareti ve gürültünün toplamının dağılımı.



### İşaretten Alınan Bir Örneğin Dağılımı:

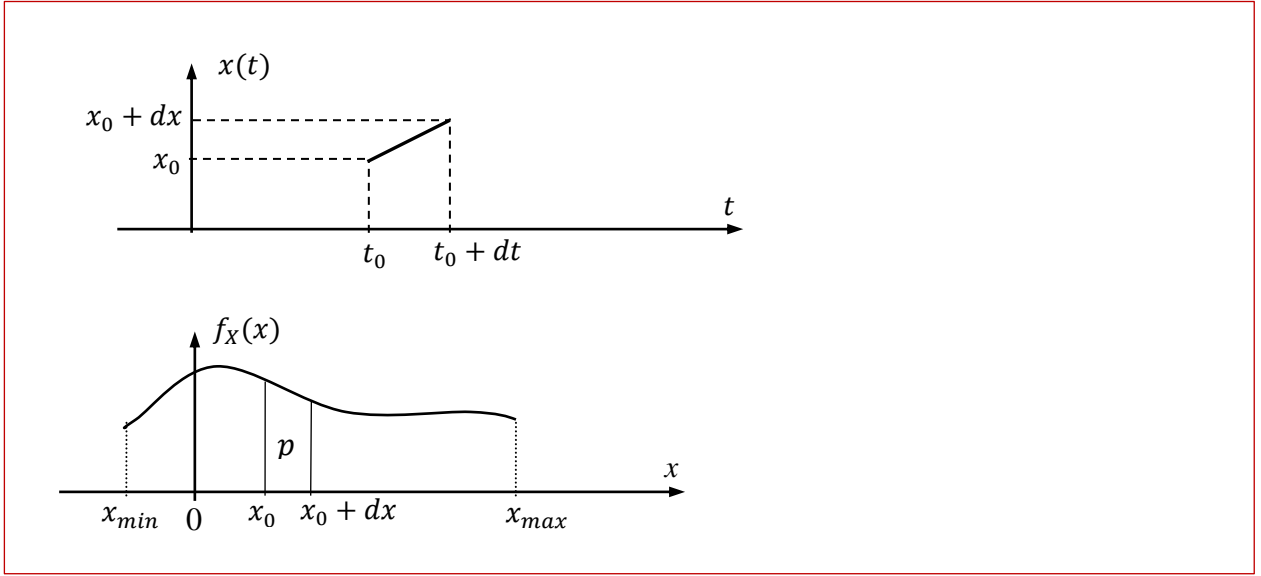
(Bu bölüm doğrudan haberleşme konularımız ile ilgili olmayıp zihin egzersizi amacıyla eklenmiştir)

Fonksiyon olarak yazabildiğimiz ama fazını bilmediğimiz bir periyodik işareten rastgele bir örnek aldığımızı varsayalım. Bu örnek bir rastgele değişkendir. Acaba bu rastgele değişkenin olasılık dağılımı nedir? Örneğin, frekansını ve genliğini bildiğimiz bir sinüsoidal işaret üreticini açtık ve bir süre sonra bir örnek (ölçüm) aldık.

$T$  periyodu süresince  $(x_{min}, x_{max})$  aralığında monotonik (türevi her yerde  $>0$  ya da her yerde  $<0$ ) bir periyodik işaretin sonsuz küçük bir kısmı bir doğru parçası olarak Şekil 1.20a'daki gibi olsun. Alınan örneğin  $(x_0, x_0 + dx)$  aralığında olma olasılığı örneğin  $(t_0, t_0 + dt)$  aralığında alınması olasılığı ile aynıdır. Bu olasılık aynı zamanda Şekil 1.20b'de gösterilen sonsuz küçük alan olduğuna göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

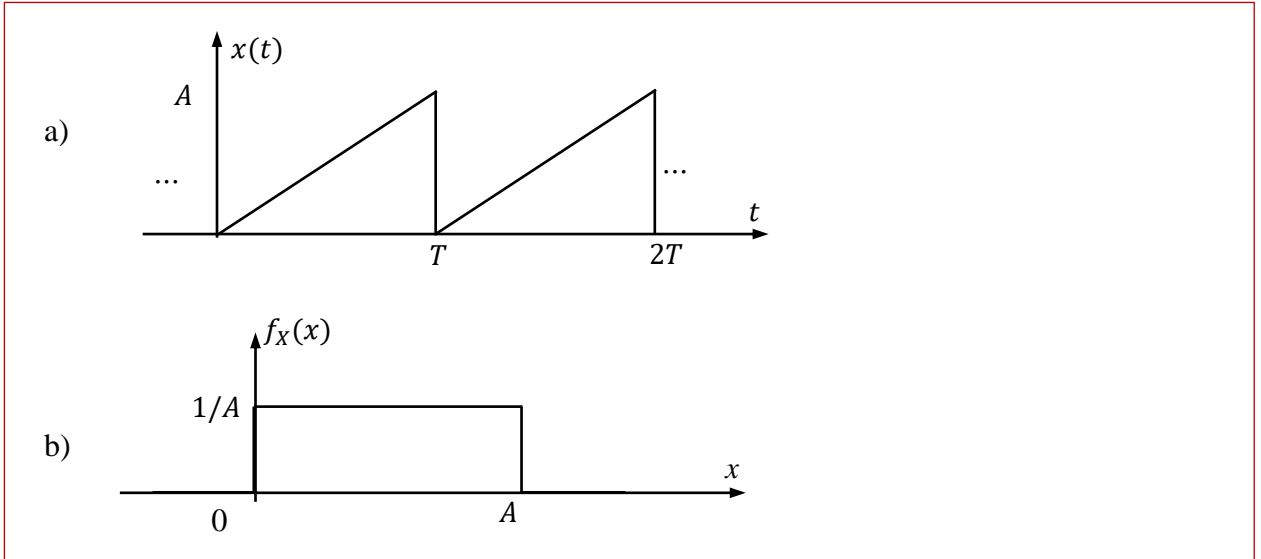
$$p = \frac{dt}{T} = \frac{dx}{x_{max} - x_{min}} = f_X dx \quad (1.23)$$

$dx$  sonsuz küçük olduğundan, alanı oluşturan trapezoidi dikdörtgen varsaydık. Buradan  $f_X = \frac{dt}{T dx}$ , ya da  $f_X |x'| = \frac{1}{T}$  yazılabilir. Eğimlerin işareti olasılığı değiştirmeyeceğinden  $x' = dx(t)/dt$ 'yi mutlak değer işareti içine aldık. Yani olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için işaretin türevinin tersini periyoda bölmek yeterlidir. Ancak işaret monotonik değilse, monotonik parçalara ayırıp, her bir parçada harcanan zaman oranları ağırlık olmak üzere) ağırlıklı ortalama almak gerekir.



Şekil 1.20. Peryodik işaretin alınan örneğin olasılık dağılımı ile işaret arasındaki ilişki.

İki basit örnek yapalım. Testere dişi peryodik işareti periyot içinde monoton artan bir işarettir (Şekil 1.21a).  $x' = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{A}{T}$  ile  $f_X = \frac{1}{A}$  buluruz (Şekil 1.21b). İşaret 0 ile A arasında değerler aldığından olasılık yoğunluk fonksiyonunun da  $[0, A]$  aralığı dışında sıfır olduğunu görebiliyoruz.

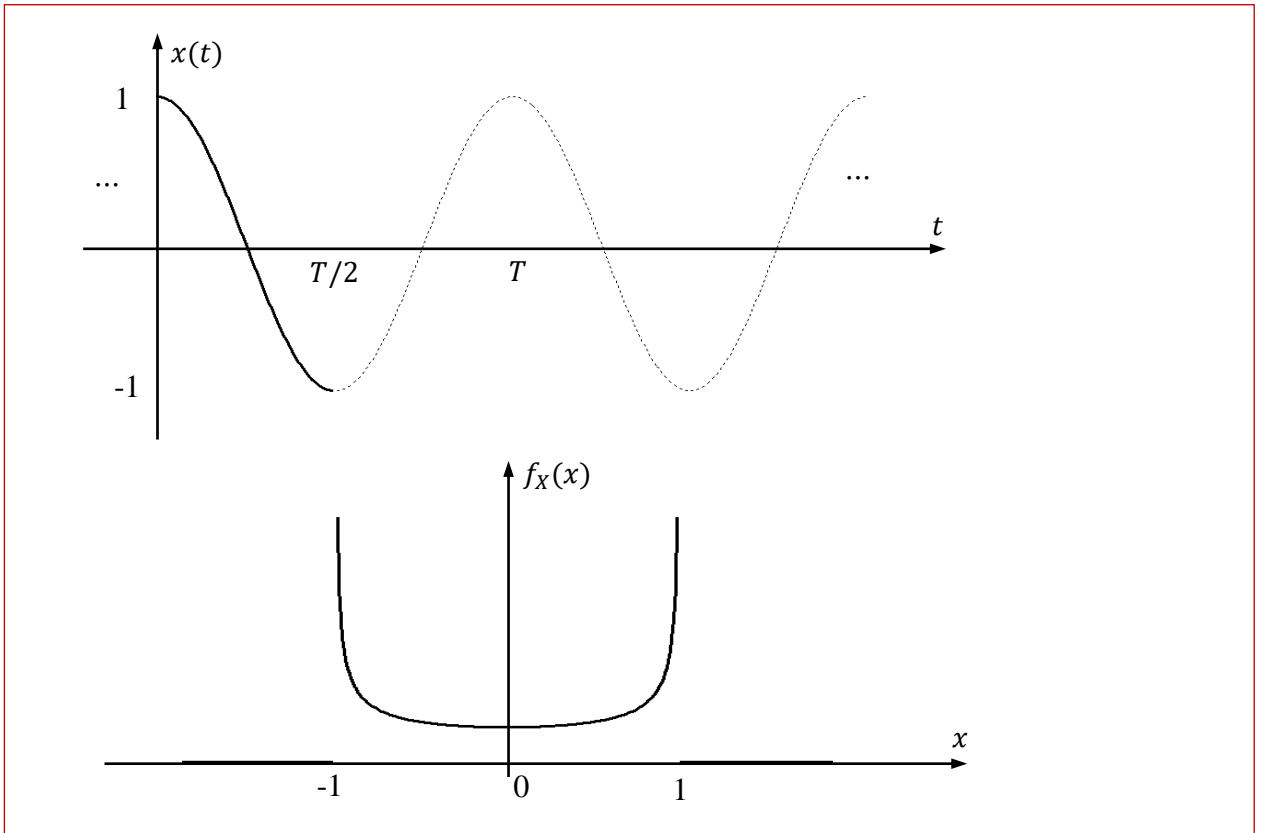


Şekil 1.21. Testere dişi işaret (a) ve işareten aldığımız örneğin olasılık dağılımı (b).

Kosinüs işaretinden alınan bir örneğin olasılık dağılımını da aynı şekilde hesaplayalım. Bu işaret  $T/2$  etrafında simetrik olduğu için, her iki yarım periyodun olasılık dağılımı aynı olacağından, sadece Şekil 1.22a'da koyu renkle gösterilen ve monoton azalan ilk yarısı için  $((0, \frac{T}{2})$  aralığında) hesap yapmak yeterli olacaktır. Bu durumda (1.23)'deki periyodu  $\frac{T}{2}$  almalıyız (yani  $f_X|x'| = \frac{2}{T}$ ).

$x(t) = \cos(2\pi t/T)$ 'nin türevi  $x'(t) = \frac{2\pi}{T} \sin(2\pi t/T)$  bulunur ve  $f_X(x) = \frac{1}{\pi \sin(2\pi t/T)}$  elde edilir.  $x(t)$ 'den  $t = \frac{T}{2\pi} \cos^{-1}(x)$  çekilir ve yerine konursa  $f_X(x) = \frac{1}{\pi \sin(\cos^{-1}(x))}$  olasılık dağılımı sonucuna ulaşılır. Ayrıca paydada "kosinüsü  $x$  olan açının sinüsü" terimi yerine  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$  eşitliği kullanılarak  $f_X(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$  yazılabilir. Şekil 1.22b bu dağılımı göstermektedir. Sinüs işaretinin genliği  $A$  ise  $f_X(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-(x/A)^2}}$  bulunur.

Aynı sonucu  $dx/dt$  yerine  $t(x)$  ters fonksiyonunu yazarak  $dt/dx$ 'ten de elde edebiliriz. Neden monotonik parçalar olması gerektiği de buradan anlaşılıyor. Aksi halde ters fonksiyonu yazamazdık. Ayrıca en başta işaretin kosinüs olduğunu söyledik. Ancak kolayca tahmin edilebilir ki, bu hesaplar işaretin fazı ve frekansından bağımsızdır. Yani  $A_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1)$  işaretinden alınan bir örneğin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$  ile aynıdır.



Şekil 1.22. Kosinüs işareti ve işaretten aldığımız örneğin olasılık dağılımı.

Beklenen değer ( $f_X(x)$ 'in ağırlık merkezi)  $E(X)$ 'in 0 olduğunu şekilden görebiliyoruz. Zaten beklenen değer ortalama değere eşit olduğu için ve kosinüs işaretinin ortalama değeri, yani DC bileşeni, 0 olduğu için bunu bekliyorduk. İşaretin standart sapması ve varyansını da, sürekli fonksiyonlar için verilen tanımını kullanarak bulabiliriz.

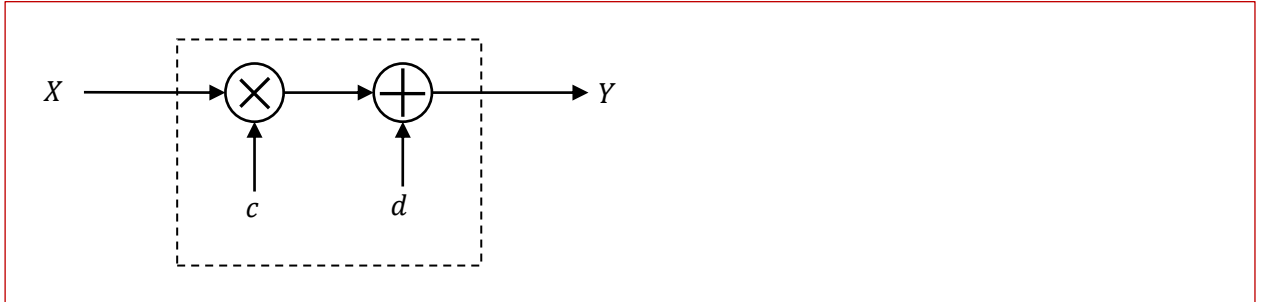
$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f_X(x) dx \quad (1.24)$$

Burada  $m = E(X) = 0$  ve  $-1 \leq x \leq 1$  olduğundan  $\sigma_X^2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}$  bulunur. Sıfır ortalama değerli herhangi bir sinüs işareti için,  $V_p$  tepe değeri olmak üzere,  $V_{rms} = \sigma_X = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$  olduğunu görüyoruz ve elektrik bilgimizi tazeliyoruz. Ancak bu sonucun sadece ortalama değeri (DC kısmı) sıfır olan sinüs işaretleri için geçerli olduğunu unutmayalım.

Farklı periyotlarda birden çok sinüs işaretinin doğrusal toplamından oluşan işaret de periyodik olup yine olasılık yoğunluk fonksiyonu parçalara ayrılarak ya da (1.22) kullanılarak incelenebilir. Ancak, birkaç sinüs dışında, bu işlemler burada irdelenebileceğimiz kadar rassal süreç bilgisi gerektirmektedir ve çoğunlukla benzetim yapılarak bulunmaktadır (denklem (1.22)'i genlik, frekans ve fazı farklı olan iki adet sinüs işaret dağılımı ile yazmayı deneyin). Yine de, sayılamayacak kadar çok, benzer karakteristikte ama ilişkisiz işaretlerin toplamının olasılık dağılımının normal dağılıma yaklaştığını belirtelim. Gürültünün neden çoğunlukla normal dağılımlı olduğu kabul edildiğinin bir açıklaması da bu olabilir.

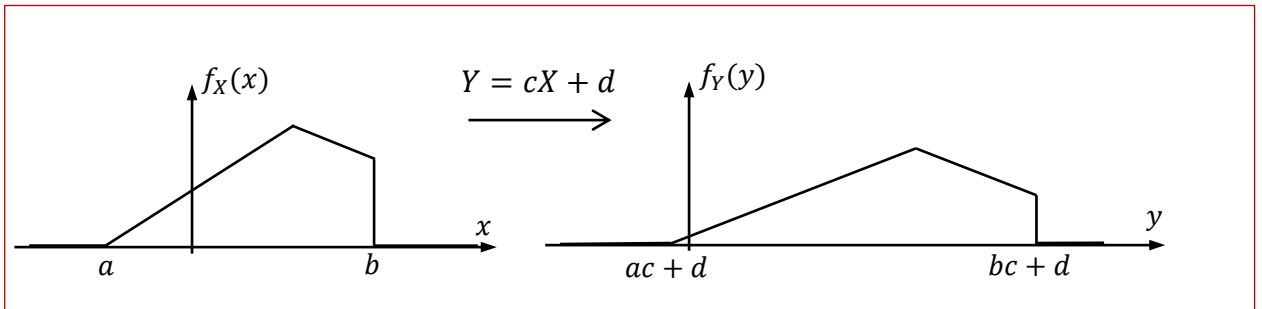
### Doğrusal İşlevlerin Olasılık Dağılımına Etkisi:

$f_X(x)$  olasılık dağılımına sahip bir işaret  $Y = cX + d$  doğrusal işlevinden geçtiğinde çıkıştaki işaretin olasılık dağılımı  $f_Y(y)$ 'nin ne olacağını bulmaya çalışalım. Burada  $c$ 'nin kazanç,  $d$ 'nin de DC değerinde öteleme (offset) olduğunu görebiliyoruz, ki bu durumda işlevin devre gösterimi Şekil 1.23'deki gibi olur.



Şekil 1.23. Kazanç ve DC ötelemeden ibaret olan doğrusal devre.

$d$ 'yi sıfır kabul ettiğimizde  $c$  kazancının etkisi işaretin genliğinin değişmesi, dolayısıyla olasılık dağılım grafiğinin genişlemesi/daralması anlamına gelir. Genel şeklinin değişmeyeceği söylenebilir.  $d$  ile toplamak ise bu grafiğin sağa/sola  $d$  kadar hareket etmesi demektir. Bu durumda örnek bir  $f_X(x)$  için  $f_Y(y)$  Şekil 1.24'de gösterildiği gibi olur. Tabii ki  $f_X(x)$  dağılımı normal (Gaussian) ise çıkıştaki işaretin  $f_Y(y)$  dağılımı da normaldir.



Şekil 1.24. Örnek bir dağılım ve doğrusal işlevden sonraki hali.

Doğrusal süzgeçler de birer doğrusal işlevdir. Ancak işaret birçok (belki de sonsuz) farklı frekanslı bileşenden oluştuğundan ve bunların hemen hepsi genlik ve faz değiştirdiğinden çıktı işaretinin dağılımı konusunda hızlıca birşey söylemek oldukça zordur. Örneğin alçak geçiren bir süzgece uygulanan testere dişi işaretini düşünelim. Girişteki işaretin dağılımı düzgün olmasına rağmen çıkıştaki işaret testere dışından oldukça uzaklaşmış olabileceğinden düzgün dağılımlı olması çok düşük bir ihtimaldir. Bu konu haberleşmede bizi çok ilgilendirmiyor. Bizi ilgilendiren kısmı normal dağılımlı bir gürültü işaretinin sıradan süzgeçlerin çıkışında da normal dağılım göstermesidir. Buradaki "sıradan" vurgusunun önemini süzgecin çok keskin bir bantgeçiren (sadece tek bir frekanstaki bileşen geçiyor) süzgeç olduğunu varsaydırmızda anlayabiliriz. Girişteki gürültü dağılımı normal olsada çıkıştaki işaret bu frekanstaki bir sinüs olabilir. Bu da demektir ki dağılım normal değildir. Yani işaretlerin ve süzgeçlerin her durumu için ayrıca incelemek gerekir.

