

1 Fourier, Tayf

Doğrusal sistemlerin, girişindeki işaretlere verdiği tepkiyi daha kolay analiz edebilmek için, giriş işaretlerini daha kolay analiz edilebilecek alt-ışaretlerin toplamı şeklinde yazabilmeyi isteriz. Sistem doğrusal olunca, sistemin her bir alt-ışarete verdiği tepkilerin toplamı çıktı işaretini verir. Burada, alt-ışaretten kastımız, daha basit, sistem tepkileri kolaylıkla hesaplanabilir (ya da bilinen) işaretlerdir. Örneğin, $h(t)$ sistemin birim dürtü tepkisi, $g_i(t)$ ($n = 0, \dots, N - 1$) N adet alt-ışaret ve sistem girdisi $x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n(t)$ olsun. Bu durumda, sistemin her bir $g_n(t)$ işaretine verdiği tepki $y_n(t) = g_n(t) * h(t)$ biliniyor ya da kolay hesaplanabiliyorsa, çıkış (tepki) işareti de $y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n(t)$ olur. O nedenle, işaretleri özellikleri bilinen $g_n(t)$ fonksiyonlarının

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g_n(t) \quad (1.1)$$

doğrusal toplamı şeklinde yazabilmeyi isteriz. Burada, a_n sabitleri $g_n(t)$ 'nin ağırlığı/şiddeti/genliğidir. Açık örnek olarak $g_0(t) = 1$, $g_1(t) = \cos(\pi t)$ ve $g_2(t) = \sin(2\pi t)$ olmak üzere,

$x(t) = 0.3 + \cos(\pi t) + 0.6\sin(2\pi t)$ olsun. Yani, $a_0 = 0.3$, $a_1 = 1$ ve $a_2 = 0.6$ dır. Sistemin 0 frekanslı (DC) girdiye ve 0.5 ve 1 frekanslı sinüs işaretlerine tepkileri biliniyorsa, ki bunlar $y_i(t)$ ($i = 0, 1, 2$) olsun, sistem çıktısı, doğrusallık gereği, kolaylıkla $y(t) = 0.3y_0(t) + y_1(t) + 0.6y_2(t)$ şeklinde yazılabilir.

Bu işlem her ne kadar kolay görünüyorsa da asıl zorluk $x(t)$ 'yi tepkileri bilinen parçalara ayırmak ve a_n ağırlıklarını bulmaktır. Daha sistematik bir yöntem ise karakteristikleri bilinen sonsuz adet doğrusal bağımsız $g_n(t)$ seti üzerindeki a_n ağırlıklarını hesaplamaktır. En çok bilinen $g_n(t)$ seti sinüsoidal işaretlerden oluşmaktadır; $g_n(t) = \cos(2\pi f_n t + \varphi_i)$ ve ($n = 0, 1, \dots, \infty$). Yani $x(t)$ 'yi

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \quad (1.2)$$

şeklinde yazmaya ve a_n , f_n ve φ_n sabitlerini bulmaya çalışacağız. Burada işi biraz daha basitleştirelim ve f_n 'lerinin birbirlerinin tam katı olduğunu varsayalım. Bu durumda, sonsuz adet sinüsoidalın içinden

seçilen iki tanesinin birbirlerine dik olması (doğrusal bağımsızlığı) için her zaman bir ortak periyot bulunabilir. Tabii ki birbirlerinin tam katı periyoda sahip iki sinüsoidal toplamı, genlik ve fazlarından bağımsız olarak, yine periyodik bir işarettir. Sıfır frekanslı olan dışında en düşük frekanslı sinüsoidal frekansı f_1 ve diğerleri de onun n tam katı olursa, yani $f_n = n f_1$ olursa, tüm sinüsoidaller birbirlerine $1/f_1$ süresince dik olurlar.

Dikliği ve doğrusal bağımsızlığı neden önemsiyoruz?: Çünkü bu durumda $x(t)$ 'yi en az sayıda sinüsoidal ile temsil etmiş oluruz. Kompleks düzlemde \vec{i} ve \vec{j} gibi iki temel vektörün doğrusal toplamları ile düzlemdeki olası tüm vektörleri temsil edebileceğimizi hatırlayalım. \vec{k} gibi yine aynı düzlemde olan üçüncü bir vektörün de temsilde kullanılması gereksizdir. Çünkü \vec{k} vektörü de \vec{i} ve \vec{j} ile temsil edilebilir. Burada da iki sinüsoidal doğrusal toplamı ile elde edebileceğimiz bir işareti, yine bu iki sinüsoidal ile ifade edilebilecek üçüncü işareti dahil edip 3 adet işaretin doğrusal toplamından elde etmek anlamsız ve yararsızdır.

$f_n = n f_1$ kabullenmesi yaptığımızda dolaylı olarak $x(t)$ 'nin de periyodik olduğunu varsaymış oluyoruz. Çünkü aralarında $f_n = n f_1$ ilişkisi olan N adet periyodik işaretin (sinüsler) doğrusal toplamı da, fazlarından bağımsız olarak periyodik olur. Bu durumda (1.2)'yi

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(2\pi n f_1 t) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2\pi n f_1 t) \quad (1.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, $a_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n) = b_n \cos(2\pi n f_1 t) + c_n \sin(2\pi n f_1 t)$ şeklinde ayırarak kosinüsün fazını iç terim olmaktan çıkardık. Biliyoruz ki, aynı frekanslı iki sinüsoidal doğrusal toplamı yine aynı frekansta $\varphi_n = \tan^{-1}(c_n/b_n)$ fazında ve $a_n = \sqrt{b_n^2 + c_n^2}$ genliğinde bir sinüsoidaldir.

Özet olarak, periyodik bir $x(t)$ işaretini sonsuz adet sinüsoidal işaretin toplamı şeklinde yazmaya çalıştık. Burada f_1 $x(t)$ 'nin temel frekansı yani, $x(t)$ 'nin periyodu T olmak üzere $f_1 = 1/T$ 'dir. Diğer sinüsoidal bileşenlerin frekanslarının da $f_n = n f_1$ olduğu görülüyor. Ayrıca, eğer b_n ve c_n katsayılarını bulabilirsek, bu sinüsoidallerin fazları ve genliklerini de hesaplayabileceğiz. b_n ve c_n katsayılarını bulmak, " $x(t)$ 'nin içinde $\cos(2\pi n f_1 t)$ ve $\sin(2\pi n f_1 t)$ işaretlerinden ne kadar var?" sorusunun cevabını bulmaktır, ki bu sorunun cevabını (en azından nasıl hesaplanacağını) önceki bölümde gördük. Yapmak istediğimiz, $\langle x(t), \cos(2\pi n f_1 t) \rangle$ ve $\langle x(t), \sin(2\pi n f_1 t) \rangle$ izdüşümlerini bulmaktır;

$$b_n = \langle x(t), \cos(2\pi n f_1 t) \rangle = \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_1 t) dt \quad (1.4)$$

$$c_n = \langle x(t), \sin(2\pi n f_1 t) \rangle = \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_1 t) dt.$$

$n = 0$ iken $c_n = 0$ ve $b_n = \int_0^T x(t) dt$ olduğunu görüyoruz. Bu sıfır frekanslı (DC) bileşenin nun daha önce **Error! Reference source not found.**'da gördüğümüz ortalama değer işlemine benzemesi için $1/T$ ile normalize etmemiz gerektiğini de görüyoruz. Bu durumda

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.5)$$

yazıldığında diğer ($n \neq 0$) bileşenlerin de normalize edilmesi gerekir. Aslında katsayılar hesaplandığında çoğunlukla bizi ilgilendiren kısmı bileşenlerin birbirlerine göre büyüklükleridir. Yine de, işaretin zaman alanında bir periyot içindeki enerjisinin katsayılarını bulduğumuz sinüsoidallerin enerjileri toplamına eşit olmasını isteriz. Hatta $x(t)$ 'nin çift fonksiyon olması durumunda $\sin(\cdot)$ bileşenlerin katsayılarının sıfır, tek fonksiyon olması durumunda da $\cos(\cdot)$ bileşenlerin katsayılarının sıfır olmasını isteriz. Yani $n \neq 0$ için izdüşüm integrallerini

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nt/T) dt$$

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nt/T) dt. \quad (1.6)$$

şeklinde yazarız.

Denklem (1.6) ile bulduğumuz katsayılara gerçek değerli Fourier Serisi katsayıları ismi verilir. Bu katsayıları/ağırlıkları (1.3)'te yerine koyarsak periyodik işaret $x(t)$ 'yi elde ederiz. Yani $x(t)$ periyodik işaretini sonsuz adet sinüsoidal işaretin toplamı ile ifade etmiş olduk.

Denklem (1.6)'yı

$$\cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{j2}. \quad (1.7)$$

Euler denklikleri ile yeniden yazdığımızda

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt \quad (1.8)$$

gerçek kısmı b_n 'ye sanal kısmı c_n 'ye eşit olan karmaşık a_n katsayılarını veren ifadeyi elde ederiz. Benzeri şekilde (1.3) ağırlıklı toplam ise

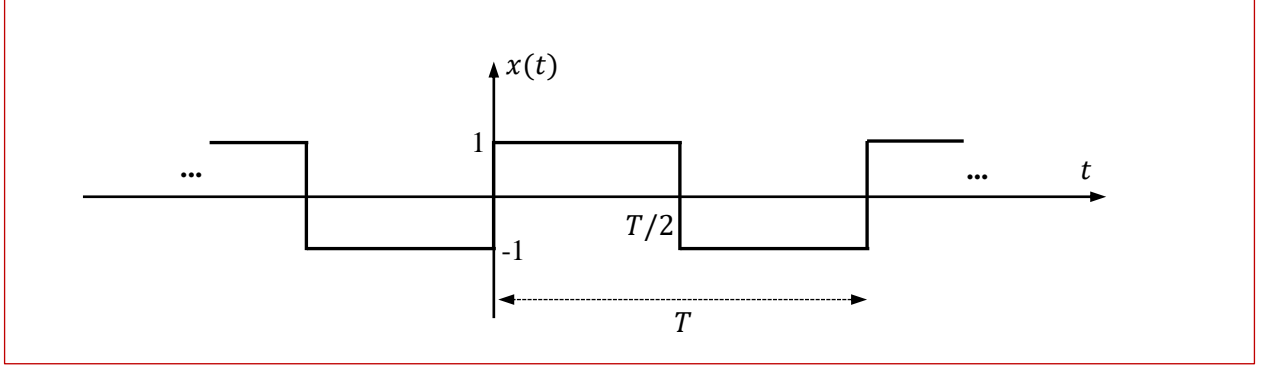
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j2\pi nt/T} \quad (1.9)$$

haline gelir. Buna Karmaşık Fourier Serisi toplamı ismi verilir. Temel olarak Gerçek Fourier Serisinden bir farkı yada kolaylığı yoktur. Aynı frekanslı $\cos(\cdot)$ ve $\sin(\cdot)$ işaretlerinin genlikleri sırasıyla gerçek ve sanal kısımlar olmak üzere bir karmaşık sayı olarak incelenir. Aslında, Devre Analizi ve Enerji derslerinden da hatırlayacağımız üzere herhangi bir sinüsoidal işaret aynı frekanslı $\cos(\cdot)$ ve $\sin(\cdot)$

işaretlerinin doğrusal toplamıyla oluşturulabildiğinden bu sinüsoidal işareti bir fazör olarak gösterebiliyorduk. Buradaki a_n katsayıları da $2\pi nt/T$ frekanslarındaki sinüsoidallerin fazörleridir.

Örnek:

Şekil 1.1'de verilen kare dalganın Fourier Serisi katsayılarını hesaplayalım.



Şekil 1.1. Simetrik dikdörtgen darbe treni (kare dalga).

İşlem aslında periyodu T olan verilen periyodik işareti (kare dalga) yine periyodik işaretler olan $\cos(\cdot)$ ve $\sin(\cdot)$ işaretlerinin toplamı cinsinden yazmaktır (1.3). Yani kare dalganın, frekansları $1/T$ ve katları olan sinüsoidaller üzerindeki izdüşümlerini hesaplayacağız.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nt/T) dt = \frac{2}{T} \left[- \int_{-T/2}^0 \cos(2\pi nt/T) dt + \int_0^{T/2} \cos(2\pi nt/T) dt \right] = 0$$

Bu sonuç bizi şaşırtmamalı, çünkü verilen kare dalga bir tek fonksiyondur ve çift fonksiyonlar (değer eksenine göre sol ve sağ tarafları simetrik) üzerindeki izdüşümü sıfırdır. Dolayısıyla, $\cos(\cdot)$ de çift fonksiyon olduğuna göre, zaten hiç hesap yapmaya bile gerek olmadan sonucun sıfır olduğunu söylemeliydik. b_0 , yani ortalama değer de, hesaplamaya gerek duymadan, sıfır olduğunu görüyoruz, çünkü fonksiyonun $+1$ ve -1 değer aldığı süreler eşittir. Tabi bu durumda c_n katsayılarının sıfır olamayacağını hemen söyleyebiliriz.

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nt/T) dt = \frac{2}{T} \left[- \int_{-T/2}^0 \sin(2\pi nt/T) dt + \int_0^{T/2} \sin(2\pi nt/T) dt \right]$$

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \left[[\cos(2\pi n/T)]_{-T/2}^0 - [\cos(2\pi n/T)]_0^{T/2} \right] = \frac{1}{n\pi} [(1 - \cos(\pi n)) - (\cos(\pi n) - 1)]$$

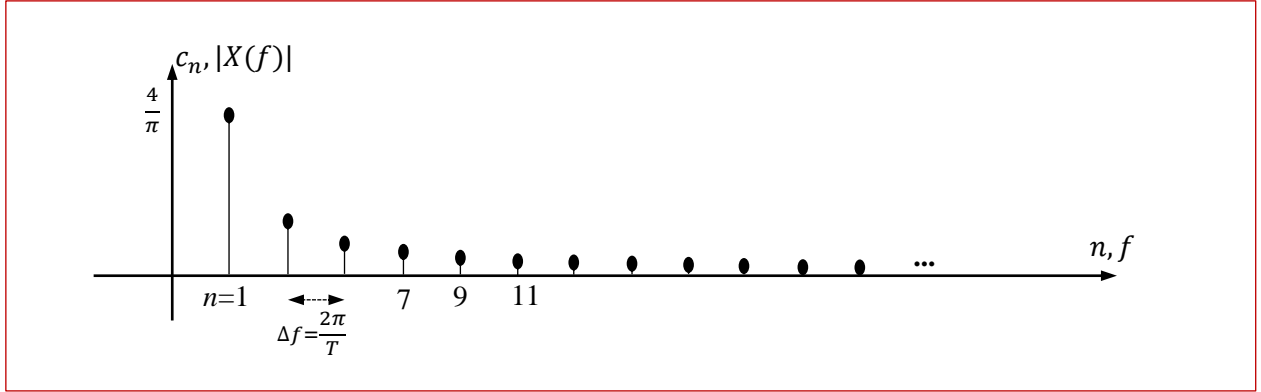
$$c_n = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(\pi n)) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

b_n ve c_n 'leri hesapladığımızı göre (1.3)'te yerine koyarak verilen kare dalganın sinüsoidaller cinsinden ifadesini yazabiliriz;

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(2\pi nt/T) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2\pi nt/T)$$

$$x(t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(2\pi nt/T).$$

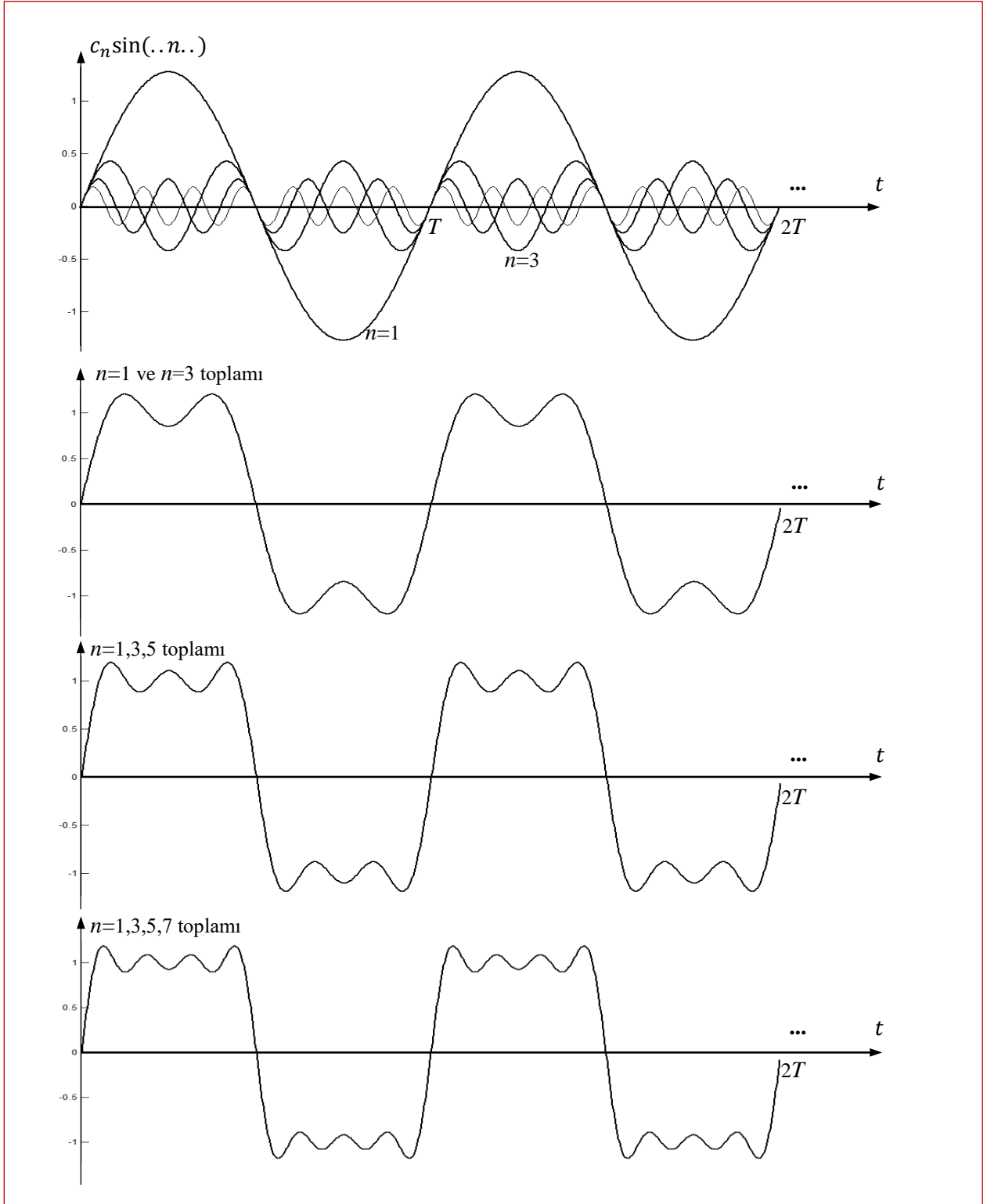
Yani, kare dalgamız $n = 1, 3, \dots$ olmak üzere sonsuz adet $\frac{4}{n\pi}$ genlikli $2\pi n/T$ frekanslı sinüs işaretlerinin toplamından oluşmaktadır. Aynı hesabı (1.8) ve (1.9)'u kullanarak yaparsanız da sonucun aynı olduğunu görebilirsiniz. Bu sinüs işaretlerinin genliklerini n 'e göre çizersek Şekil 1.2'yi elde ederiz.



Şekil 1.2. Kare dalgayı oluşturan sinüslerin genlikleri.

Şekil 1.2'de sinüslerin frekanslarını da gösterdik. Burada, kare dalganın periyodu T arttıkça bileşenlerin arasındaki frekans farkının azaldığını, bileşenlerin sıfır frekansına doğru yaklaşacağını görebiliriz.

Örnekteki gibi sonsuz adet sinüs işaretinin toplamının kare dalga olacağını anlamakta zorluk çekebiliriz. Bunun için örnekteki en düşük frekanslı birkaç bileşenin toplamını gösteren Şekil 1.3'e bakalım. Burada 4 adet ($n=1, 3, 5, 7$ için) sinüs işareti ve sırasıyla toplama eklenerek oluşan işaretler gösterilmektedir. Anlaşılabileceği üzere çok az bileşen dahi eklendiğinde toplam işaret kare dalgaya benzemeye başlamaktadır. Ancak yine açıktır ki, sonsuz adet bileşenden bazıları eklenmez ise (en düşük genlikte olanlar bile) kare dalga oluşturulamaz. Örneğin girişinde ideal kare dalga olan bir sistem, bu bileşenlerden bazıları (örneğin yüksek frekansta olanları) geçirmiyor ise, çıkışında ideal kare dalga görmemiz imkansızdır. Sistemin tek tek bu bileşenlere karşı davranışını/çıkışını biliyorsak, doğrusallıktan dolayı, kare dalga uyguladığımızda çıktıyı hesaplayabiliriz.

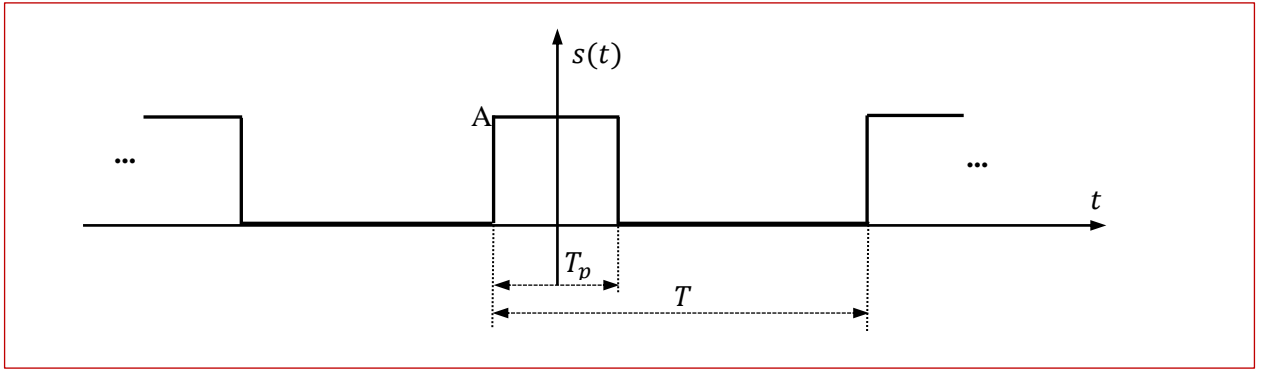


Şekil 1.3. Sinüslerin kare dalgayı oluşturması.

Örnek:

Şekil 1.4'de verilen dikdörtgen dalganın Fourier Serisi katsayılarını hesaplayalım.

Şekil 1.4. Dikdörtgen darbe treni (dikdörtgen dalga).



Bu işaretin önceki kare dalgadan pek bir farkı yok. Kare dalga dikdörtgen dalganın özel bir durumu. Ayrıca bu örnekteki dalga dikey eksene göre simetrik, yani sinüs izdüşümleri (a_n) sıfır çıkacak. Ortalama değerin de sıfır olmayacağını şekilden görüyoruz;

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{A}{T} \int_0^{T_p} dt = \frac{AT_p}{T}.$$

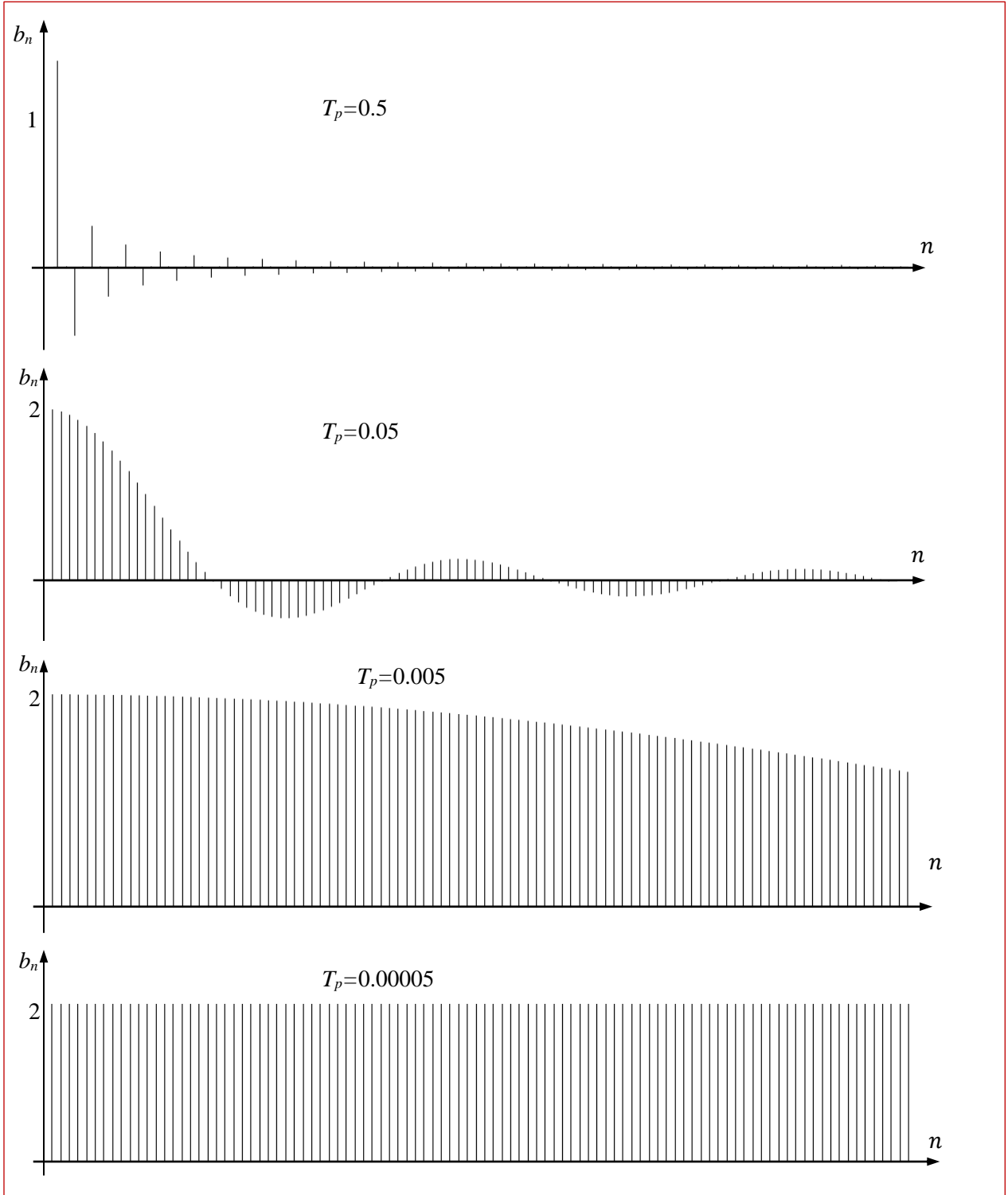
Kosinüs izdüşümleri ise

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(2\pi nt/T) dt = \frac{2A}{T} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} \cos(2\pi nt/T) dt = \frac{A}{n\pi} \sin(2\pi nt/T) \Big|_{-T_p/2}^{T_p/2}$$

$$b_n = \frac{2A}{n\pi} \sin(\pi n T_p/T) = \frac{2AT_p}{T} \text{sinc}(\pi n T_p/T) \text{ şeklinde bulunur.}$$

Tabi ki temel (fundamental) frekans her zamanki gibi $f_s = 1/T$.

Şimdi de $A = 1/T_p$ yapalım (darbe altında kalan alan sabit olsun - birim dürtü fonksiyonunun tanımından) ve $T=1$ alıp T_p/T 'nin farklı oranları için b_n katsayılarını çizelim (Şekil 1.5). $\frac{T_p}{T} = 0.5$ için daha önce hesapladığımız kare dalga katsayılarından pek farklı değil (farkı bulunuz). Ancak $\frac{T_p}{T}$ oranı azaldıkça, yani temel frekans aynı kaldığı halde darbe genişliği giderek azaldıkça, grafiğin düzleştiğini görüyoruz. Buradan söyleyebiliriz ki, $\frac{T_p}{T}$ sonsuz küçük olduğunda, yani darbeler birim-darbe (Dirac-delta) olunca grafik büyüklükleri aynı olan birim dürtülerden oluşacak. Darbeler arası ise $f_s = 1/T$ olarak kalacak.



Şekil 1.5. Dikdörtgen dalganın farklı T_p/T oranları için bileşen katsayıları.

Fourier Serileri periyodik fonksiyonlara uygulanabiliyor. Tabi ki uygulamada pekçok işaret periyodik değildir, hatta çoğu durumda rastgelelikler içerdiklerinden dolayı fonksiyon şeklinde yazılamazlar. Periyodik olmaması durumunda periyodu sonsuza götürerek limit durumu incelenebilir ve benzeri şekilde sonsuz adet sinüsoidal işaretin toplamı yazılabilir.

Peryodun sonsuz büyük ($T \rightarrow \infty$) olması durumunda $f_1 = 1/T$ olduğundan, hem temel frekans f_1 hem de sinusoidal bileşenler arasındaki frekans farkı Δf sonsuz küçük olur ($\Delta f \rightarrow df$). Böylelikle, (1.9)'u kesikli toplam yerine sürekli toplam, yani integral şeklinde yazabiliriz;

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df. \quad (1.10)$$

Burada $a_n \rightarrow X(f)$ ve $n/T \rightarrow f$ dönüşümlerini/notasyonlarını da görebiliyoruz. Katsayı bulma korelasyon integrali (1.8) de

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.11)$$

halini alır. Tabi ki, bu dönüşümleri sadece aperiodyk fonksiyonlar için yapmak zorunda değiliz, periyodik fonksiyonlar için de periyot sonsuzmuş gibi düşünülebilir. Ancak artık fonksiyonun periyodikliğinden bağımsız olarak herhangi bir frekans aralığında sayılabilir sayıda sinusoidal değil, sonsuz adet sinusoidal olabileceğini düşünmeliyiz. Eğer işaret periyodik ise bu aralıktaki enerji sayılabilir sayıda bileşene dağılır ve her bileşendeki enerji farklı büyüklükte sonsuz olur. Hem hepsine sonsuz deyip hem de farklı büyüklükte olabileceklerini söylemek biraz tutarsız gibi görünse de, aynı frekansta ama farklı genlikte iki sinusoidal düşünümüzde, her ikisinin de enerjisinin sonsuz olduğunu ama yüksek genlikte olanın daha fazla güç içerdiğini aklımıza getirelim.

Denklemler (1.11) ve (1.10)'daki işlemlere sırasıyla Sürekli Zaman Fourier Dönüşümü ve Sürekli Zaman Ters Fourier Dönüşümü ismi verilir. Daha sonra göreceğimiz kesikli zamandaki benzeri işlemlerin bağlamda olmadığı zamanlarda da sadece Fourier Dönüşümü ifadesi kullanılabilir.

Fourier Dönüşümünün fonksiyon/işaret analizinde önemli bir yeri vardır. Dönüşüm ve ters dönüşümün birbir olduğunu vurgulamak için $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ yazılır. Yani $x(t)$ 'nin tek bir Fourier Dönüşümü vardır, aynı şekilde $X(f)$ 'in de tek bir Ters Fourier Dönüşümü vardır. $x(t)$ 'nin Fourier Dönüşümünün $X(f)$ olduğunu ve $X(f)$ 'in Ters Fourier Dönüşümünün $x(t)$ olduğunu söylemek için $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ ve $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$ ifadeleri kullanılır. Genel olarak dönüşen fonksiyon küçük harfle dönüşüm sonucu ise büyük harfle gösterilir. Tabi ki, Fourier Dönüşümü doğrusal birebir dönüşüm olduğundan, mühendisliğin her alanında (elektriksel işaret olması gerekmeden) kullanılabilir. Örneğin $x(t)$ 'yi zamanın bir fonksiyonu olarak düşünmeye alışmışız, ancak, $u(d)$ uzaklığın bir fonksiyonu olabilir ve Fourier Dönüşümü olan $U(h)$ de uzamsal frekanslardaki genliği gösterebilir. Genel olarak dönüşümler incelenecek fonksiyonu dik fonksiyonların doğrusal toplamı şeklinde ifade ederek başka bir açıdan bakabilmemizi sağlarlar. Fourier Dönüşümünün elektrik-elektronikteki önemi ise bu dik fonksiyonların yine elektrik-elektronikte daima karşılaşılan sinusoidal fonksiyonlar olmasıdır.

Hem $x(t)$ hem de $X(f)$ genel olarak kompleks değerlidirler. Her noktada değerleri $a(f) + jb(f)$ (yada $c(t) + jd(t)$) şeklinde gerçek ve sanal kısımlardan oluşur. Gerçek ve sanal kısımlarını ifade etmek için çoğunlukla $a = \text{Re}\{.\}$ ve $b = \text{Im}\{.\}$ yazılır. $a + jb$ 'nin temsil ettiği f frekansındaki sinusoidalın fazı $\tan^{-1}(b/a)$ genliği ise $\sqrt{a^2 + b^2}$ dir. Genlik ve faz sırasıyla $|X(f)|$ ve $\angle X(f)$ ile gösterilirler. Örneğin $u(.)$ zaman yada frekans alanında bir kompleks fonksiyon olsun;

$\text{Re}\{u(.)\}$ fonksiyonun gerçek kısmını,

$Im\{u(\cdot)\}$ fonksiyonun sanal kısmını,

$|u(\cdot)|$ fonksiyonun genliğini ve

$\langle u(\cdot) \rangle$ fonksiyonun faz açısını gösterir. Tüm bu değerler zamanın, frekansın yada $u(\cdot)$ 'nin bağlı olduğu değişkenin bir fonksiyonu olabilir.

Tablo I Fourier Dönüşümünün en çok başvurulan özelliklerini ispatlamadan listelemektedir.

	$x(t) \Leftrightarrow X(f)$ ise
Doğrusallık	$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \Leftrightarrow c_1X_1(f) + c_2X_2(f)$
Zamanda kayma	$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Ölçekleme	$x(at) \Leftrightarrow X(f/a)/ a $
Evrişim	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y^*(t - \tau)d\tau \Leftrightarrow X(f)Y(f)$
Kipleme	$x(t)y(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)Y(f - \tau)d\tau$
Otokorelasyon	$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau)dt \Leftrightarrow X(f) ^2$
İkilik	$X(t) \Leftrightarrow x(-f)$
Rayleigh enerji	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$
Eşlenik simetrisi	if $x(t)$ is real ($Im\{x(t)\} = 0$) $X(f) = X^*(-f)$ $ X(f) = X(-f) $ çift fonksiyon $\langle X(f) \rangle = -\langle X(-f) \rangle$ tek fonksiyon
Dönüşüm döngüsü	$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\} = x(-t)$ $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}\} = x(t)$

Fourier Dönüşümünün özelliklerini kullanarak bazı özel fonksiyonların Fourier Dönüşümünü bulalım.

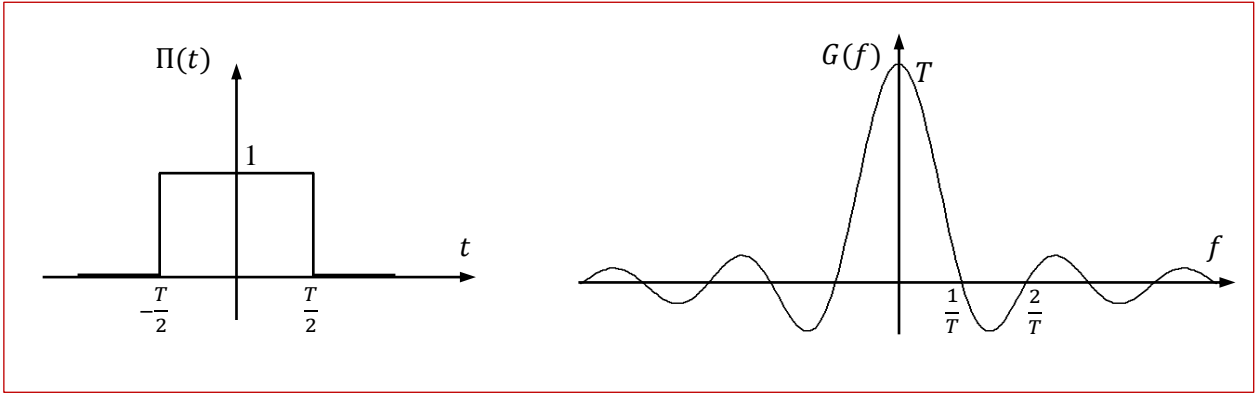
Örnek: Birim dürtü fonksiyonu $\delta(t)$ 'nin Fourier Dönüşümü; $\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt$ (dönüşümün tanımını kullandık). $\delta(t)$ sadece $t = 0$ 'da sıfırdan farklı olduğu için $\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt$. Birim dürtünün tanımı gereği, altında kalan alan 1 olduğu için $\Delta(f) = 1$ yazabiliriz. Yani $\delta(t) \Leftrightarrow 1$. İkilik özeliğini kullanarak da, $1 \Leftrightarrow \delta(f)$ yazılabilir (soru: "birim dürtü, genlikleri 1 olan sonsuz adet sinüs işaretinin toplamından oluşmaktadır" diyebilir miyiz?). Zamanda kaymış birim dürtüler için ise dönüşümün zamanda kayma özeliğini kullanarak doğrudan $\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi ft_0}$ yazılabilir.

$$\text{Örnek: } \Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

şeklinde verilen dikdörtgen darbenin Fourier Dönüşümünü bulmak için yine dönüşümün tanımını kullanalım. Bu işaret haberleşme sistemlerinde oldukça sık kullanılmaktadır ve kapı (gate) fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır.

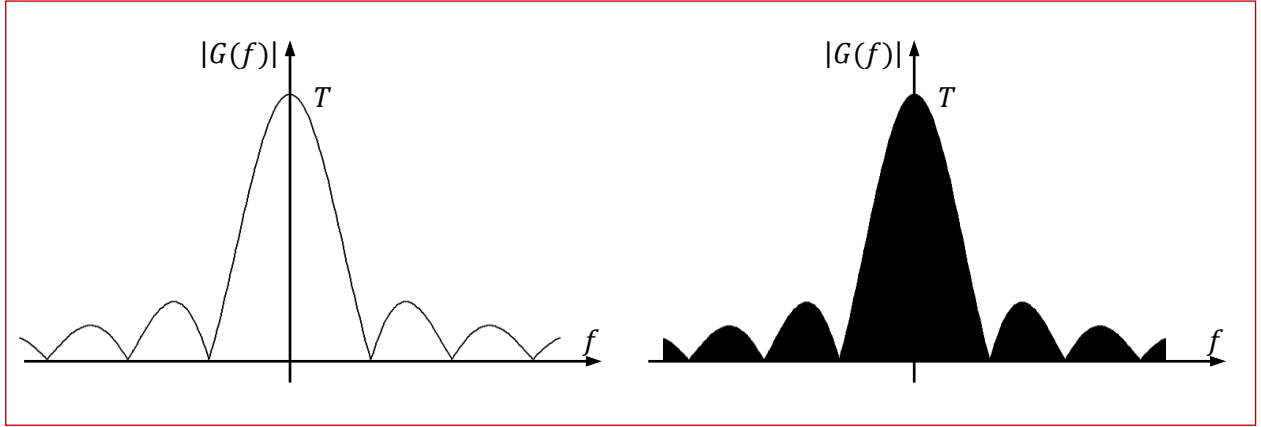
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{-1}{j2\pi f} (e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT})$$

$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{j2}$ Euler denkleğini kullanarak $G(f) = \frac{1}{\pi f} \sin(\pi fT)$ bulunur. Yani $\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow T \text{sinc}(fT)$. Kapı işareti ve Fourier dönüşümü Şekil 1.6'te çizilmiştir.

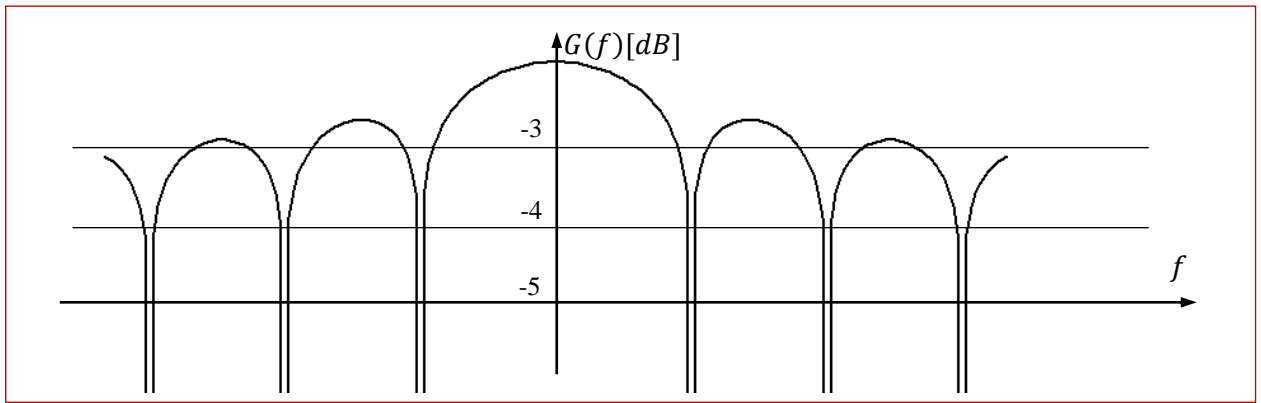


Şekil 1.6. Kapı işareti ve Fourier dönüşümü.

Örneğimizdeki kapı işaretinin Fourier dönüşümünde dikkati çeken bir nokta onu oluşturan kosinüsler tümünün fazlarının sıfır yada π olmasıdır. Dolayısıyla çizimde, Fourier Dönüşümünün karmaşık sayılar vermesi beklentimize rağmen, mutlak değer (genlik) kullanmak zorunda kalmadık. Tabii ki bu durum başlangıçta kapı işaretimizi dikey eksenle göre simetrik almamızdan oluştu. Frekans alanında hemen her zaman olarak işaretlerin mutlak değeri çizilir (Şekil 1.7). Bazen de işaret ile yatay eksen arası dolu şekilde çizilir. Bu çizimlere frekans tayfı, yada kısaca tayf ismi verilir. Pratik uygulamalarda ise işaretin logaritması (dB, dBW cinsinden) çizilir (Şekil 1.8). Log-genlik tayfı çizildiğinde yatay eksen dikeye göre 0 seviyesinde olamayacağından hangi seviyede olduğu belirtilir. Hemen hemen tüm pratik uygulamalarda frekansın negatif olduğu kısım çizilmez, çünkü gerçek işaretlerin tayf simetrisinden dolayı pozitif kısım ile aynıdır. Eksenler çizilmese de önemli kafes çizgileri gösterilir. Örneğin Şekil 1.8'deki -5 seviyesi ile -4 seviyesi arasındaki fark 10 kattır (10^{-5} ve 10^{-4}).



Şekil 1.7. Kapı işaretinin genlik tayfı.



Şekil 1.8. Kapı işaretinin log-genlik tayfı.

Örnek: Gerçek $x(t)$ tabanbant işaretinin bant genişliği B olsun ve Fourier dönüşümü $X(f)$ grafik olarak verilmiş olsun (örn. Şekil 1.9b). Kipleme özeliğini kullanarak $x(t)\cos(2\pi f_c t)$ 'nin tayfını $f_c > B$ için çizelim. Kipleme özeliği iki işaretin Fourier dönüşümlerinin (frekans alanında) evrişimini söylüyor; $Y(f) = \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_c t)\}$ olmak üzere

$$x(t) \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)Y(f - \tau)d\tau.$$

Burada τ zaman alanında değil frekans alanındaki kaydırmalardır. Tabi $X(f)$ verilmediği için evrişim integralini hesaplayamayacağız. Ancak, $Y(f)$ 'yi hesaplayıp, evrişimi grafik olarak kestirebiliriz;

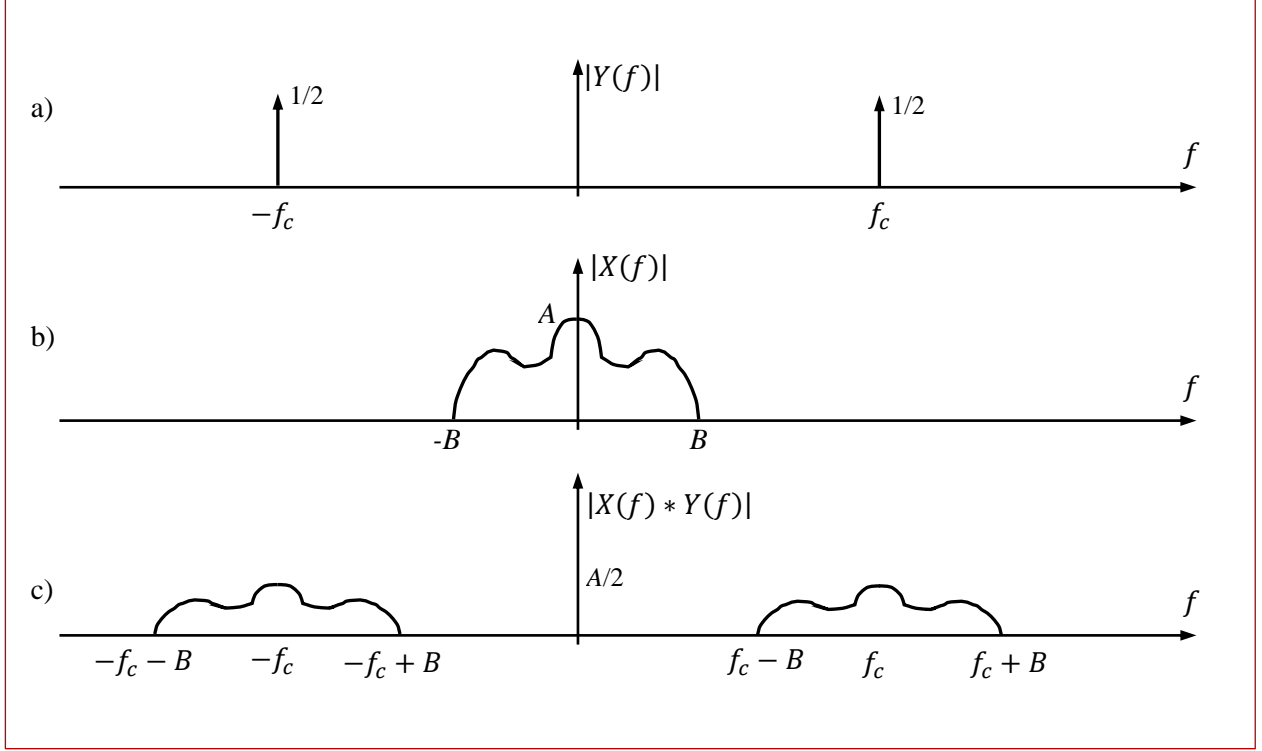
$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{jz} + e^{-jz}) e^{-j2\pi f t} dt$ (Euler denkliği (1.7)'yi kullandık).

$$Y(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j2\pi(f_c - f)t} + e^{-j2\pi(f_c + f)t}) dt = \frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c).$$

Yani sinüsoidal işaretin tayfı, Şekil 1.9a'da gösterildiği gibi, $-f_c$ ve $+f_c$ frekanslarında $\frac{1}{2}$ büyüklüğünde birim dürtülerden oluşmaktadır. Bu durumda, birim-darbenin eleme özeliğini kullanarak

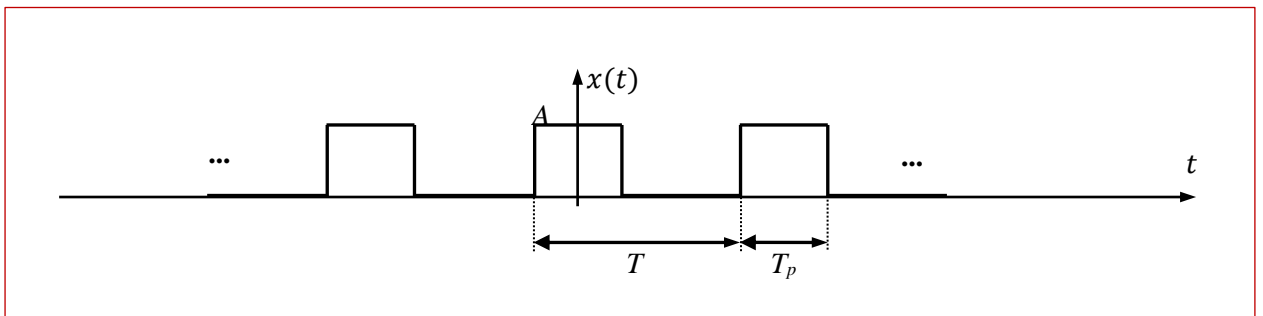
$$x(t) \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c)$$

yazabilir ve Şekil 1.9c'deki frekans tayfını çizebiliriz.



Şekil 1.9. Kipleme örneği. a) Kosinüs işaretinin tayfı, b) örnek $X(f)$ tayfı, c) iki tayfin evrişimi.

Örnek : Şekil 1.10'da verilen dikdörtgen dalganın Fourier Dönüşümünü bulalım. (not: birçok kaynak buna kare dalga diyebilmektedir. Bu kitapta ise $T_p = T/2$ olan (olası iki durumun sürelerinin eşit olduğu) işarete kare dalga diyoruz. Kare dalga dikdörtgen dalganın özel durumudur).



Şekil 1.10. Dikdörtgen darbe treni (dikdörtgen dalga).

Tek bir dikdörtgen darbeye $A\Pi(\frac{t}{T_p})$ dersek, dikdörtgen darbe treni $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\Pi(\frac{t}{T_p} - nT)$ şeklinde yazılabilir (işaretin özelliğini koruması için $T_p < T$ ve $A > 0$ varsayalım). Fourier Dönüşümünün doğrusallığını ve zamanda kayma özeliği $u(t - nT) \Leftrightarrow U(f)e^{-j2\pi f nT}$ 'yi kullanarak,

dikdörtgen darbenin Fourier Dönüşümü $U(f) = AT_p \text{sinc}(fT_p) = \frac{A}{j2\pi f} (e^{j\pi f T_p} - e^{-j\pi f T_p})$ olmak üzere

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f) e^{-j2\pi f n T}$$

yazabiliriz. Açarsak,

$$X(f) = AT_p \text{sinc}(fT_p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f n T} = AT_p \text{sinc}(fT_p) \sum_{n=0}^{\infty} (e^{j2\pi f n T} + e^{-j2\pi f n T})$$

$$= 2AT_p \text{sinc}(fT_p) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\pi f n T) \text{ ya da}$$

$$X(f) = \frac{A}{j2\pi f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{j\pi f T_p} - e^{-j\pi f T_p}) e^{-j2\pi f n T}$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{j\pi f (T_p - 2nT)} - e^{-j\pi f (T_p + 2nT)})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A(T_p + 2nT)}{j2\pi f (T_p + 2nT)} (e^{j\pi f (T_p + 2nT)} - e^{-j\pi f (T_p + 2nT)})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_p + 2nT) \sin(\pi f (T_p + 2nT))$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} AT_p \sin(\pi f (T_p + 2nT)) \text{ elde ederiz.}$$

Birşeyler bulduk ama nasıl yorumlayacağız? Elektronik öğrencileri olarak birçok şeyin daha basit ifade edilebileceği beklentisi içindeyiz. Bu frekans karakteristiğinin nasıl çizilebileceği hakkında pek bir fikrimizin olmadığı kanısındayım. O halde başka bir yol deneyelim. Periyodik işaretlerin Fourier Serileri (yani sin-cos fonksiyonları yada kompleks üstel fonksiyonların toplamı) şeklinde ifade edilebileceğini görmüştük. İşaretimiz de (dikdörtgen dalga) bir periyodik işaret olduğuna göre önce onu Fourier Serisi şeklinde yazalım;

$$a_n = \frac{AT_p}{T} \text{sinc}\left(\frac{\pi n T_p}{T}\right) \text{ olmak üzere } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j2\pi n t / T}.$$

Genel olarak a_n 'in kompleks sayılardan oluştuğunu biliyoruz ama $n=0$ darbesini dikey eksene göre simetrik seçersek a_n 'in sanal kısmının yukarıdaki gibi sıfır çıkacağını da biliyoruz. Ayrıca, kompleks Fourier serisi katsayıları a_n 'in aslında daha önce hesapladığımız gerçel Fourier serisi katsayıları olan b_n 'in yarısı olduğunu görüyoruz (2 çarpanı yok). Bu, gerçel seride $n=0 \dots \infty$, ama kompleks seride $n=-\infty \dots \infty$ olmasından.

Biliyoruz ki toplamın Fourier Dönüşümü, doğrusallıktan dolayı, ayrı ayrı dönüşümlerin toplamıdır. Yani sonsuz toplam içindeki $e^{j2\pi n t / T}$ nin Fourier Dönüşümünü hesaplayıp yerine koyacağız ve $x(t)$ 'nin Fourier Dönüşümü hesaplanmış olacak. Yani,

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j2\pi n t / T}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathcal{F}\{e^{j2\pi n t / T}\} \text{ gibi.}$$

Kompleks üstel terimin Fourier Dönüşümünü alıştırma olarak hesaplayabiliriz ama basit olduğu için bir dönüşüm tablosundan bakalım ve $\mathcal{F}\{e^{j2\pi n t / T}\} = \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ yazalım. Bu durumda dikdörtgen dalganın Fourier Dönüşümü olarak

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (1.12)$$

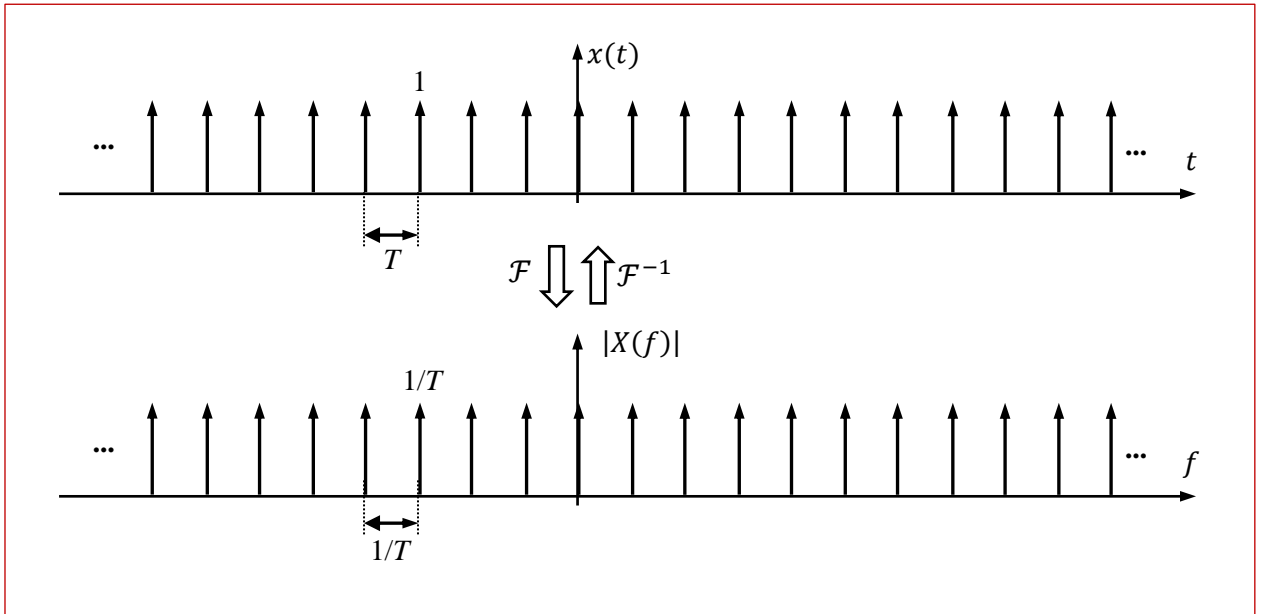
elde edilir. Yani frekans eksenine $f_1 = \frac{1}{T}$ aralıklarıyla yerleşmiş ve büyüklükleri a_n ile belirlenen sonsuz adet dirac-delta darbelerimiz var. a_n çarpanları ise A , n , T_p ve T ile belirlendiği için bu parametrelerin verildiği özel durumlar dışında belirgin bir çizim yapma imkanımız yok.

Bir özel durum olarak $x(t)$ 'yi T aralıklarıyla yerleştirilmiş sonsuz adet birim dürtü seçelim. Yani $A = 1/T_p$ ve $T_p \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda

$$a_n = \lim_{T_p \rightarrow 0} \frac{AT_p}{T} \text{sinc}\left(\frac{\pi n T_p}{T}\right) = \frac{1}{T} \text{ olur. Böylece}$$

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (1.13)$$

elde ederiz. Yani zaman alanındaki T aralıklı birim dürtü treninin Fourier Dönüşümü frekans alanında $1/T$ aralıklı birim dürtü trenidir. $1/T$ ise sadece bir enerji koruyucu sabit çarpandır (Şekil 1.11). Bu sonucu daha sonra örnekleme bölümünde kullanacağız.



Şekil 1.11. Birim dürtü treni ve Fourier Dönüşümü.

